3000 سؤال محلول مع فيديوهات الشرح

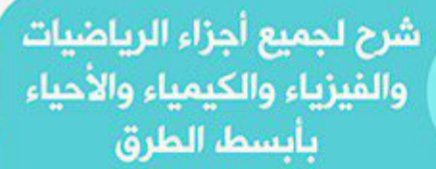
المعاصر في التحصيلي

رياضيات - فيزياء - كيمياء - أحياء

المؤلف / عماد الجزيري

الدمام ٠٥٥٣٤٦٧٩٤٠

مميزات الكتاب





شرح لجميع أجزاء الرياضيات والفيزياء والكيمياء والأحياء بأبسط الطرق





التركيز في الشرح على أهم الموضوعات لاختبار التحصيلي



تجميعات السنوات السابقة محلولة كاملة في كل مادة على حده

فيديوهات شرح لمنهج الرياضيات وتجميعات الرياضيات

















فريق العمل

أ/ عماد الجزيري (رياضيات)

أ/أسامة عبدالغني (فيزياء)

أ/ عبدالرازق حجازي (كيمياء)

أ/ إسلام علي (أحياء)



مواضيع الرياضيات

جميع الموضوعات مشروحة بالفيديو

على موقع المؤلف

www.qudratonline.com



مميزات قسم الرياضيات

- ✓ شرح كل جزء في الدرس وحل أمثلة اختبارات على كل جزئية حلاً نموذجياً
- ✓ تجميعات السنوات السابقة محلولة كاملاً بعد نهاية كل موضوع
- ✓ كل موضوع له فيدو لشرحة وتوضيحه بنظام الباركود اسكنر
- ✓ جميع التجميعات (1437 – 1436 – 1435) مشروحة بالفيديو

المؤلف / عماد الجزيري

مؤلف سلسلة كتب المعاصر في القدرات والتحصيلي

الدمام 0553467940

قناة المعاصر في شرح القدرات و التحصيلي





١ المتجهات

❶ الصورة الإحداثية للمتجه

الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A\langle x_1 , y_1\rangle$ ونقطة نهايته $B\langle x_2, y_2\rangle$ هي

$$B - A = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$$

مثال1 اوجد الصورة الاحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي بدايته $A\langle 2 , 4\rangle$ ونهايته $B\langle 3 , -1\rangle$

الحل $\overrightarrow{AB}$ = النهاية - البداية

$$\overrightarrow{AB} = \langle 3 , -1\rangle - \langle 2 , 4\rangle = \langle 1 , -5\rangle$$

❷ طول المتجه

طول المتجه $\overrightarrow{AB} = \langle x , y\rangle$ هو

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

مثال2 اوجد طول المتجه $\vec{v} = \langle 4 , 3\rangle$

الحل $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

مثال3 اوجد طول المتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي بدايته $A\langle 2 , 4\rangle$ ونهايته $B\langle 3 , -1\rangle$

الحل $\overrightarrow{AB} = \langle 3 , -1\rangle - \langle 2 , 4\rangle = \langle 1 , -5\rangle$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{26}$$

❸ متجه الوحدة

متجه الوحدة في اتجاه المتجه $\vec{v}$ هو

$$\frac{\vec{v}}{|v|}$$

مثال5 وجد متجه وحدة في اتجاه $\vec{v} = \langle 4 , 3\rangle$

الحل $\frac{\langle 4 ,3\rangle}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{\langle 4 ,3\rangle}{\sqrt{25}} = \langle \frac{4}{5} , \frac{3}{5} \rangle$

لمزيد من الفهم

فيديو الشرح

❹ ضرب عدد في متجه

عند ضرب عدد في المتجه يتم ضرب العدد في x , y

❺ جمع و طرح المتجهات

إذا كان $\vec{u} = \langle x_2 , y_2\rangle$ و $\vec{v} = \langle x_1 , y_1\rangle$ فإن

- ✓ $\vec{v} + \vec{u} = \langle x_1 + x_2 , y_1 + y_2\rangle$
- ✓ $\vec{v} - \vec{u} = \langle x_1 - x_2 , y_1 - y_2\rangle$

مثال 6 إذا كان $\vec{u} = \langle 1 , 3\rangle , \vec{v} = \langle -1 , 3\rangle$

اوجد $-4\vec{u}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $2\vec{u} + \vec{v}$

الحل $2\vec{u} + \vec{v} = 2\langle 1,3\rangle + \langle -1 , 3\rangle =$

$= \langle 2 , 6\rangle + \langle -1 , 3\rangle = \langle 1 , 9\rangle$

$\vec{u} - \vec{v} = \langle 1 ,3\rangle - \langle -1 ,3\rangle = \langle 2 , 0\rangle$

$-4\vec{u} = -4\langle 1 , 3\rangle = \langle -4 , -12\rangle$

❻ الضرب الداخلي للمتجهات

إذا كان $\vec{u} = \langle x_2 , y_2\rangle$ و $\vec{v} = \langle x_1 , y_1\rangle$ فإن

الضرب الداخلي بينهما هو $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$

مثال7 إذا كان $\vec{u} = \langle 1 , 3\rangle , \vec{v} = \langle -1 , 4\rangle$

اوجد $\vec{u} \cdot \vec{v}$

الحل

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \langle 1 , 3\rangle \cdot \langle -1 , 4\rangle =$

$(1)(-1) + (3)(4) = 11$

ملحوظة

إذا كان ناتج الضرب الداخلى للمتجهان = صفر

فإن المتجهين متعامدان

مثال8 إذا كان u , v متعامدان وكان

$\vec{u} = \langle 3 , k\rangle$ و $\vec{v} = \langle 1 , 1\rangle$ أوجد قيمة k

الحل حيث أن المتجهين متعامدان فإن $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$\langle 3 , k\rangle \cdot \langle 1 , 1\rangle = 0$$
$$3 + k = 0$$

فإن
$$k = -3$$

❼ الصورة الإحداثية للمتجه

إذا عُلم طول المتجه $\vec{v}$ والزاوية المحصورة بينه وبين محور x الموجب فإنه يمكن إيجاد الصورة الإحداثية له

$$\langle |\vec{v}| \cos\theta , |\vec{v}| \sin\theta \rangle$$

مثال9 اوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\vec{v}$ الذى طوله 6 وزاوية ميله مع محور x الموجب هو $45°$

الحل الصورة الإحداثية $= \langle 6\cos 45 \ , 6 \sin 45\rangle$

$$\langle 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} , 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\rangle = \langle 3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\rangle$$

❽ الزاوية بين المتجهين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|u| \cdot |v|}$$

مثال10 أوجد الزاوية بين المتجهين

$\vec{u} = \langle 1 , 0\rangle$ و $\vec{v} = \langle 1,1\rangle$

الحل

$$\cos\theta = \frac{\langle 1 ,0\rangle \cdot \langle 1 ,1\rangle}{\sqrt{1^2+0^2}\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1+0}{\sqrt{1}\sqrt{2}}$$
$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\theta = 45$$

❾ زاوية إتجاه المتجه

هى الزاوية بين المتجه ومحور x الموجب

زاوية إتجاه المتجه $\vec{u} = \langle x, y\rangle$ هى

- إذا كان المتجه في الربع الأول $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$
- إذا كان المتجه في الربع الثاني أو الثالث $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + 180$
- إذا كان المتجه في الربع الرابع $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} + 360$

مثال 11 أوجد زاوية اتجاه المتجه $\vec{u} = \langle 4,4\rangle$ مع الاتجاه الموجب لمحور x

الحل

$$\theta = \tan^{-1}\frac{4}{4} = \tan^{-1} 1$$
$$\theta = 45°$$

مثال 12 أوجد زاوية اتجاه المتجه $\vec{u} = \langle -4,4\rangle$ مع الاتجاه الموجب لمحور x

الحل

$$\theta = \tan^{-1}\frac{-4}{4} + 180 =$$
$$\theta = \tan^{-1} -1 \ + 180$$
$$\theta = \ -45 + 180 = 135°$$

❿ الإحداثيات في الفضاء ثلاثي الأبعاد

كل القوانين السابقة تنطبق على المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

مثال 13 إذا كانت $\vec{a} = \langle 1,2,3\rangle$ و $\vec{b} = \langle 1,1,-2\rangle$ أوجد $\vec{a} \cdot \vec{b}$

الحل

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle 1,2,3\rangle \cdot \langle 1,1,-2\rangle$$
$$= 1 + 2 + (-6) = -3$$

مثال 14 إذا كانت $\vec{a} = \langle 1,-1,4\rangle$ و $\vec{b} = \langle 0,2,k\rangle$ أوجد قيمة k علماً بان المتجهين متعامدان

الحل حيث أن المتجهين متعامدان فإن

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$
$$\langle 1,-1,4\rangle \cdot \langle 0,2,k\rangle = 0$$
$$0 - 2 + 4k = 0 \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{2}$$

مثال 15 أوجد قياس الزاوية بين المتجهين

$\vec{u} = \langle 0,1,1\rangle$ و $\vec{v} = \langle 1,0,1\rangle$

الحل

$$\cos\theta = \frac{\langle 0,1,1\rangle \cdot \langle 1,0,1\rangle}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+0^2+1^2}}$$
$$\cos\theta = \frac{0+0+1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$
$$\theta = 60°$$

⑪ الضرب الإتجاهي للمتجهات في الفضاء

إذا كان $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ و $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$

فإن الضرب الاتجاهي $\vec{a} \times \vec{b}$ هو

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

مثال15 أوجد ناتج الضرب الاتجاهي للمتجهين

$\vec{u} = \langle 3, -2, 1 \rangle$ و $\vec{v} = \langle 5, 0, 1 \rangle$

الحل

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} k$$

$$(-2 \cdot 1 - 1 \cdot 0)i - (3 \cdot 1 - 5 \cdot 1)j + (3 \cdot 0 - -2 \cdot 5)k$$

$$= -2i + 2j - 10k$$

⑫ مساحة متوازي الأضلاع

مساحة سطح متوازي الذي فيه u , v ضلعان متجاوران

هى $|u \times v|$

مثال 16 أوجد مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي فيه

$u = 2i + 4j - 3k \quad , \quad v = i - 5j + 3k$

متجهان متجاوران

الحل

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(12 - 15)i - (6 + 3)j + (-10 - 4)k$$

$$-3i - 9j - 14k$$

مساحة متوازي الأضلاع $\sqrt{(-3)^2 + (-9)^2 + (-14)^2}$

$$= \sqrt{286}$$

تدريب أي مما يلي متجهان متعامدان

a) $\langle 1,0,0 \rangle, \langle 1,2,3 \rangle$	b) $\langle 3,4,6 \rangle, \langle 6,4,3 \rangle$
c) $\langle 1,2,3 \rangle, \langle 2,-4,6 \rangle$	d) $\langle 3,-5,4 \rangle, \langle 6,2,-2 \rangle$

تدريب ماهو قياس الزاوية بين المتجهين

$= \langle -9,0 \rangle, v = \langle -1,-1 \rangle$

a) 90	b) 0	c) 45	d) 135

تجميعات السنوات السابقة محلولة فيديو



فيديو شرح التجميعات

تجميعات 1437

❶ إذا كان المتجهه $u = \langle 1, -2 \rangle , v = \langle 3, k \rangle$

متعامدين فما قيمة k

a) $\frac{3}{2}$	b) $\frac{2}{3}$	c) $\frac{1}{4}$	d) $\frac{3}{4}$

❷ أوجد الزاوية بين المتجهين $u = \langle 1,1 \rangle, v = \langle 4,0 \rangle$

a) 60	b) 30	c) 45	d) 90

❸ إذا كانت زاوية المتجه v هو 210 وطوله 14 فإن

الصورة الاحداثية للمتجه هى

a) $\langle -7\sqrt{3}, -7 \rangle$	b) $\langle 7, 7\sqrt{3} \rangle$	c) $\langle 7,7 \rangle$	d) $\langle \sqrt{3}, 7 \rangle$

تجميعات 1436

❹ أوجد متجه وحده في اتجاه المتجه $u = \langle 3,4 \rangle$

a) $\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$	b) $\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle$	c) $\langle \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \rangle$	d) $\langle \frac{2}{5}, \frac{1}{5} \rangle$

❺ إذا كان $u = 4i + 3j - k \, , \; v = 2i + 2j - 2k$

ضلعان متجاوران في متوازي الأضلاع ، فما مساحة متوازي الأضلاع

a) 6	b) $\sqrt{50}$	c) $\sqrt{56}$	d) $\sqrt{71}$

تجميعات 1435

❻ أوجد حاصل الضرب الإتجاهي $u \times v$ للمتجهين

$u = \langle 1, -2, 0 \rangle , v \langle 4, 0, -1 \rangle$

a) $\langle 2,1,8 \rangle$	b) $\langle 3,4,5 \rangle$	c) $\langle 0,1,3 \rangle$	d) $\langle -2,1,-8 \rangle$

❼ إذا كان $s = \langle 4, -3 \rangle, t = \langle -6, 2 \rangle$ فأي ممايلي يمثل r حيث $r = t - 2s$

a) $\langle -14, 8 \rangle$	b) $\langle 14, 8 \rangle$	c) $\langle 8, 14 \rangle$	d) $\langle 6, 14 \rangle$

مفاتيح الحل

7	6	5	4	3	2	1
a	a	c	a	a	c	a

❶ نهاية الدالة عند نقطة

خطوات إيجاد نهاية دالة عند نقطة c

نعوض عن قيمة x بـ النقطة c فينتج أحد الحالات الآتية

❶ أن يكون الناتج **عدد** فيكون هو النهاية المطلوبة

❷ أن يكون الناتج $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ فيكون ليس لها نهاية

❸ أن يكون الناتج $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (كمية غير معينة) لذلك

يجب حذف العامل المتسبب في وجود الصفر بسطاً ومقاماً

عن طريق التحليل – العامل المشترك – الضرب في المرافق

مثال1 أوجد نهاية الدوال الآتية

❶ $\lim_{x\to -1} (x^2 + 3x - 5)$

❷ $\lim_{x\to 2} \left(\frac{2x+1}{x-2}\right)$

❸ $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5}$

❹ $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-7x+12}{x-3}$

❺ $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

الحل

❶ $\lim_{x\to -1}(x^2 + 3x - 5)$

نعوض عن قيمة x بالعدد -1

$$= (-1)^2 + 3(-1) - 5 = -7$$

نعوض عن قيمة x بالعدد 2

❷ $\lim_{x\to 2} \left(\frac{2x+1}{x-2}\right) = \frac{2\cdot 2+1}{2-2} = \frac{5}{0}$

الدالة ليست لها نهاية عندما $x \to 2$

❸ $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5} = \frac{25-25}{5-5} = \frac{0}{0}$

لابد من التحليل لحذف العامل الصفري



$$= \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5}$$

$$= \lim_{x\to 5}(x+5) = 10$$

❹ $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-7x+12}{x-3} = \frac{3^2-7(3)+12}{3-3} = \frac{0}{0}$

لابد من التحليل لحذف العامل الصفري

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-4)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x-4) =$$

$$3 - 4 = -1$$

❺ $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{\sqrt{4}-2}{4-4} = \frac{0}{0}$

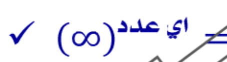
لابد أن نضرب في المرافق لحذف الجذر

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} =$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$$

❖ نهاية الدالة عند ∞ و -∞

ملاحظات هامة



✓ $(\infty)^{\text{اي عدد}} = \infty$

✓ $(-\infty)^{\text{عدد زوجي}} = \infty$

✓ $(-\infty)^{\text{عدد فردي}} = -\infty$

✓ $(\infty) \times$ عدد موجب $= \infty$

✓ $(\infty) \times$ عدد سالب $= -\infty$

❷ نهاية الدالة كثيرة الحدود عند ∞ و -∞

نعوض عن قيمة x في الحد ذو أعلى أس فقط

❶ $\lim_{x\to\infty} x^3 = (\infty)^3 = \infty$

❷ $\lim_{x\to-\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$

❸ $\lim_{x\to-\infty} x^4 = (-\infty)^4 = \infty$

عماد الجزيري
مؤلف كتاب المعاصر

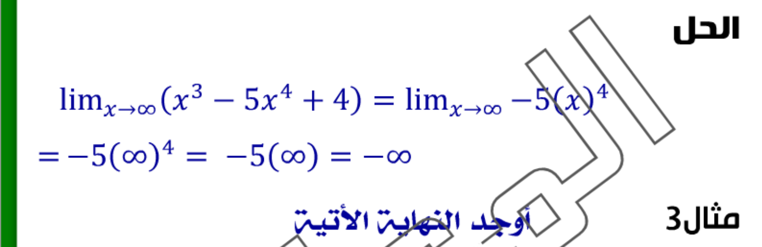
عند إيجاد نهاية الدالة كثيرة الحدود عند ∞ − أو ∞

نوجد النهاية للحد الأكبر أس فقط

مثال2 أوجد النهاية الأتية

$$\lim_{x\to\infty}(x^3-5x^4+4)$$

الحل



$$\lim_{x\to\infty}(x^3-5x^4+4)=\lim_{x\to\infty}-5(x)^4$$
$$=-5(\infty)^4=\ -5(\infty)=-\infty$$

مثال3 أوجد النهاية الأتية

$$\lim_{x\to-\infty}(x^7-5x^4+4)$$

الحل

$$\lim_{x\to-\infty}(x^7-5x^4+4)=\lim_{x\to-\infty}x^7=(-\infty)^7$$
$$=-\infty$$

❸ نهاية الدالة الكسرية عند ∞ و $-\infty$

عند إيجاد نهاية الدالة الكسرية عند ∞ و $-\infty$

يكون الناتج أحد الحلول الأتية

❶ إذا كان أكبر أس في المقام الناتج صفر

❷ إذا كانت درجة البسط = درجة المقام فإن الناتج

$\frac{\text{معامل أكبر أس}}{\text{معامل أكبر أس}}$

❸ إذا كان أكبر أس في البسط فنعوض بقيمة x في الحد ذو أكبر أس

مثال 4 أوجد نهاية الدوال الأتية

❶ $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x^2-4}{5x^4-3x^3+1}$

❷ $\lim_{x\to-\infty}\frac{7x^3-3x^2+5}{5x^3-4}$

❸ $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-4x^3+8}{5x^2+2x}$

❹ $\lim_{x\to\infty}\frac{7x^5-3x+5}{2x^4-4}$

الحل

❶ $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x^2-4}{5x^4-3x^3+1}=0$

لأن أكبر أس موجود في المقام

❷ $\lim_{x\to-\infty}\frac{7x^3-3x^2+5}{5x^3-4}$

وحيث أن درجة البسط = درجة المقام

الناتج هو $\frac{\text{معامل أكبر أس}}{\text{معامل أكبر أس}}=\frac{7}{5}$

❸ $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-4x^3+8}{5x^2+2x}$

وحيث أن أكبر أس في البسط فنعوض بقيمة x في الحد ذو أكبر أس ليصبح الناتج هو

$$-4\,(-\infty)^3\ =\ \infty$$

❹ $\lim_{x\to\infty}\frac{7x^5-3x+5}{2x^4-4}$

وحيث أن أكبر أس في البسط فنعوض بقيمة x في الحد ذو أكبر أس ليصبح الناتج هو

$$7(\infty)^5=\ \infty$$

تجميعات السنوات السابقة محلولة فيديو

فيديو شرح التجميعات

تجميعات 1437

❶ ماقيمة $lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$

a) 2	b) 4	c) 5	d) - 4

تجميعات 1436

❷ أوجد $\lim_{x\to\infty}\frac{10x^3-12x}{5-2x^3+3x^2}$

a) 5	b) - 5	c) 4	d) 10

❸ ماقيمة $\lim_{x\to-1}\frac{4-\sqrt{x^2+x+16}}{x^3-1}$

a) 4	b) -1	c) 0	d) 16

مفاتيح الحل

3	2	1
c	b	a

عماد الجزيري

مؤلف كتاب المعاصر

٣ الإشتقاق

❖ قواعد إشتقاق الدالة

مشتقة دالة f بالنسبة لـ x يرمز لها بأحد الرموز الأتية

$$f'(x)\ ,\ y`\ ,\quad \frac{dy}{dx}\ ,\quad \frac{df}{dx}$$

❶ مشتقة العدد الثابت = صفر

مثال1 إذا كان $f(x) = 5$ فإن $f`(x) = 0$

❷ مشتقة x^n هو nx^{n-1}

نزل الأس و اطرح منه 1

مثال 2 أوجد مشتقة الدوال الأتية

❶ $f(x) = 3x^4$

❷ $f(x) = -2x^{-5}$

❸ $f(x) = \frac{3}{x^4}$

❹ $f(x) = 4x^{\frac{1}{2}}$

الحل

❶ $f`(x) = 3\,(4)x^3 = 12x^3$

❷ $f`(x) = -2(-5)x^{-6} = 10x^{-6}$

❸ $f(x) = 3x^{-4} = 3\,(-4)x^{-5}$

$12x^{-5} = \frac{-12}{x^5}$

❹ $f`(x) = 4\left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-1} = 2x^{\frac{-1}{2}}$

❸ مشتقة مجموع وطرح دوال هو مشتقة كل دالة على حدى

مثال3 أوجد مشتقة الدالة

$f(x) = 15x^2 - 5x + 7$ عندما $x = 1$

الحل

$f`(x) = 30\,x - 5$

نعوض عن x بـ 1 ليصبح الناتج هو

$f`(1) = 30\,(1) - 5 = 25$

❹ مشتقة حاصل ضرب دالتين هو

مشتقة الأولى × الثانية + مشتقة الثانية فى الأولى

مثال4 إذا كان $f(x) = (5\,x - 4)(x^2 + 5)$

أوجد $f'(-1)$

الحل

$$f'(x) = 5(x^2+5) + 2x(5x-4)$$
$$= 5x^2 + 25 + 10x^2 - 8\,x$$
$$= 15\,x^2 - 8\,x + 25$$
$$f'(-1) = 15(-1)^2 - 8(-1) + 25 = 48$$

مثال5 إذا كان $f(x) = 3x^2(\,2x+7)$ أوجد $f'(x)$

الحل

$$f'(x) = 6x(2x+7) + 2\,(3x^2)$$
$$= 12x^2 + 42x + 6x^2 = 18x^2 + 42\,x$$

❺ مشتقة قسمة دالتين هو

$$\frac{\text{مشتقة البسط} \times \text{المقام} - \text{مشتقة المقام} \times \text{البسط}}{(\text{المقام})^2}$$

مثال 6 أوجد مشتقة الدالة $f(x) = \frac{7x}{5x-3}$

الحل

$$f'(x) = \frac{7(5x-3) - 5(7x)}{(\,5x-3\,)^2}$$
$$= \frac{35x - 21 - 35x}{(\,5x-3\,)^2}$$
$$\frac{-21}{(\,5x-3\,)^2}$$

مثال7 إذا كانت $f(x) = \frac{3}{8x+2}$ أوجد $f'(2) =$

الحل

$$f'(x) = \frac{0(8x+2) - 8(3)}{(8x+2)^2}$$
$$f'(x) = \frac{-24}{(8x+2)^2}$$
$$f'(2) = \frac{-24}{(8\cdot2+2)^2} = \frac{-2}{27}$$

عماد الجزيري

مؤلف كتاب المعاصر

مثال8 إذا كانت $f(x) = kx^2 - 4x$ و $f'(1) = 2$

أوجد قيمة k

الحل $f'(x) = 2kx - 4$

$f'(1) = 2k(1) - 4 = 2$

$2k = 6 \to\to k = 3$

⑥ مشتقة دالة $\sqrt{\ }$ هو $\frac{\text{مشتقة ما داخل }\sqrt{\ }}{2\sqrt{\dots}}$

مثال9 أوجد مشتقة الدالة $f(x) = \sqrt{3x+7}$

الحل $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+7}}$

⑦ السرعة اللحظية لجسم يتحرك عند اللحظة t هو مشتقة دالة المسافة عند تلك اللحظة

مثال 10 تعطى المسافة التى يتحركها جسم بالسنتيمترات بعد t ثانية بالدالة

$f(x) = 18t - 2t^2 - 1$

أوجد معادلة السرعة اللحظية لهذا الجسم

الحل نوجد مشتقة دالة المسافة

أي أن معادلة السرعة اللحظية هي

$f'(x) = 18 - 4t$

⑧ ميل المماس لمنحنى الدالة عند نقطه هو نفسه المشتقة الأولى للدالة عند تلك النقطة

مثال 11 أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة عند $(1,0)$

$y = 3x^2 - 1$

الحل نوجد مشتقة الدالة $y' = 6x$

ثم نعوض عن x النقطة في الدالة

ليصبح الميل هو $y' = 2$

⑧ النقاط الحرجة هى نقطة عندها المشتقة الأولى للدالة = صفر أو تكون غير معرفة

مثال 12 أوجد النقاط الحرجة للدالة $y = x^2 - 6x$

الحل نوجد المشتقة الأولى للدالة $y' = 2x - 6$

عند النقاط الحرجة تكون المشتقة = صفر

$2x - 6 = 0 \to\to x = 3$

تجميعات السنوات السابقة محلولة فيديو

فيديو شرح التجميعات

تجميعات 1437

❶ أوجد مشتقة الدالة $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$ عندما $x = 0$

a) 3	b) -5	c) 7	d) 0

❷ إذا كان $f(x) = \frac{5}{x+7}$ فإن $f'(x)$ تساوي

a) $\frac{-5}{x}$	b) $\frac{5}{x^2}$	c) $\frac{-5}{(x+7)^2}$	d) $\frac{5}{(x+7)^2}$

تجميعات 1436

❸ ماهى مشتقة الدالة $g(x) = \sqrt[5]{x^9}$

a) $9\sqrt[5]{x^4}$	b) $\frac{9}{5}\sqrt[5]{x^4}$	c) $\sqrt[4]{x^9}$	d) $\sqrt{x^4}$

❹ إذا كانت $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$ فإن $f'(x)$ تساوي

a) x^2	b) x^4	c) $4x^3$	d) $3x^4$

تجميعات 1435

❺ أوجد السرعة المتجه اللحظية للدالة

$f(t) = 1 + 55t - 3t^3$

a) $55 - 9t^2$	b) $9t^2$	c) $55t$	d) 1

❻ ماميل مماس المنحنى $y = 2x^2$ عند النقطة $(1,2)$

a) 4	b) 1	c) 8	d) 2

❼ مامشتقة $h(x) = (-7x^2 + 4)(2 - x)$

a) $-14x$	b) $14x$
c) $-12x^2 - 28x + 4$	c) $21x^2 - 28x - 4$

مفاتيح الحل

7	6	5	4	3	2	1
d	a	a	c	b	c	d

عماد الجزيري
مؤلف كتاب المعاصر

٤ التكامل

الدالة $p(x)$ هى دالة أصلية للدالة $f(x)$

إذا كانت مشتقة $p(x)$ هى $f(x)$

مثال1

إذا كانت $f(x)=3x^2$ فإن أحد دوالها الأصلية هى

$a)\ 6x$ $b)\ 3x^2-6$ $c)\ 3x^2+1$ $d)\ x^3$

الحل نبحث في الخيارات أي الدوال يكون مشتقتها هو $3x^2$ نجد أن الحل الصحيح هو $d)\ x^3$

❶ تكامل الدالة x^n هو نزيد الأس 1 ونقسم على الأس الجديد + ثابت التكامل

مثال2 أوجد ناتج $\int 10x^4dx$

الحل

$\frac{10x^5}{5}+c$

$2x^5+c$

مثال3 اوجد ناتج $\int \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}dx$

الحل $=\int \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}\ dx$

$=\frac{5}{3}\frac{x^{\frac{2}{3}+\frac{3}{3}}}{\frac{5}{3}}+c=x^{\frac{5}{3}}+c$

$\sqrt[3]{x^5}+c$

❷ تكامل العدد الثابت k هو kx

مثال4 $\int 5\,dx=5x+c$

❸ تكامل مجموع وطرح دوال هو تكامل كل دالة على حدى

مثال5 $\int(6x^5+4x^3+7)dx$

الحل $=6\frac{x^6}{6}+4\frac{x^4}{4}+c$

x^6+x^4+c

❹ التكامل المحدد

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

نكامل الدالة عادي ثم نعوض عن قيمة x بـ b ثم نعوض عن قيمة x بـ a ونطرحهما

مثال6 أوجد ناتج $\int_1^2 3x^2dx$

$=\left(\frac{3x^3}{3}\right)_1^2=\ (x^3)_1^2=$

$(2^3)-(1^3)=7$

مثال7 $\int_0^2(4x^3+6x^2-5)dx$

$=\left(4\frac{x^4}{4}+6\frac{x^3}{3}-5x\right)_0^2=(x^4+2x^3-5x)_0^2$

$(2^4+2(2)^3-5(2))-(0^4+2(0)^3-5(0))$

$=22$

مثال8

إذا كان $\int_0^k(2x+4)dx=5$ أوجد قيمة k

الحل $\left(2\frac{x^2}{2}+4x\right)_0^k=5$

$(k^2+4k)=5$

$k^2+4k-5=0$

$(k-5)(k+1)=0$

$k=5$ أو $k=-1$

لكن k=-1 مرفوضة لان قيمة k لابد ان تكون أكبر من صفر في حدود التكامل

تدريب إذا كان $\int_0^2 kx\,dx=6$ فما قيمة k

a) 1	b) 2	c) 3	d) 4

❺ المساحة تحت المنحنى

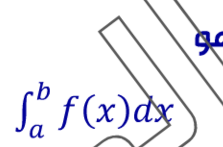
مساحة المنطقة المظللة

تحت منحنى الدالة $f(x)$

هو

$\int_a^b f(x)dx$

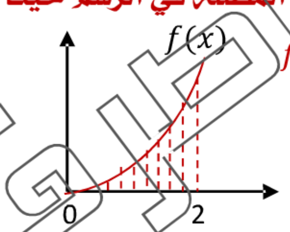
حيث a , b هى حدود المنطقة المظللة



مثال9 أوجد مساحة المنطقة المظللة في الرسم حيث

$f(x) = x^2$

في $[0,2]$



الحل مساحة المنطقة المظللة هى $\int_0^2 f(x)dx$

$$\int_0^2 x^2\,dx = \left(\frac{x^3}{3}\right) =$$

$$\left(\frac{2^3}{3}\right) - (0) = \frac{8}{3}$$

(حدود التعويض: 2 ، 0)

مثال10 أوجد قيمة التكامل

$$\int_3^4 \sqrt{x^2-4x+4}\,dx$$

الحل

المقدار x^2-4x+4 هو نفسه $(x-2)^2$

وبالتالي يصبح المقدار المطلوب هو

$$\int_3^4 \sqrt{(x-2)^2}\,dx$$

$$\int_3^4 (x-2)\,dx$$

$$\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)_3^4$$

$$\left(\frac{16}{2}-8\right)-\left(\frac{9}{2}-6\right) = \frac{3}{2}$$

ملحوظة هامة $\int_a^a f(x)dx = 0$

مثال11 أوجد قيمة k إذا كان $\int_1^k (x^3+4x)dx = 0$

الحل معنى أن التكامل = 0 فإن $k=1$

تجميعات السنوات السابقة محلولة فيديو

فيديو شرح التجميعات

تجميعات 1437

❶ أوجد قيمة المقدار

$$\int_2^6 \frac{x^2}{x^2-1}dx - \int_2^6 \frac{1}{x^2-1}dx + \int_2^6 \frac{1}{2}dx$$

a) 6	b) 4	c) 2x	d) 0

تجميعات 1436

❷ إذا كانت $\int_1^k (x^2+5x)dx = 0$

أوجد قيمة k

a) 0	b) 1	c) 2	d) 5

تجميعات 1435

❸ أوجد قيمة $\int \frac{5}{2}\sqrt{x^3}\,dx$

a) $\sqrt{x^5}+c$	b) $\sqrt{x^2}$	c) $\sqrt[3]{x}$	d) $5x$

❹ ماهى الدالة الأصلية للدالة $f(x) = 1+\frac{1}{x^2}$

a) x^2	b) $\frac{1}{x}$
c) $x+\frac{1}{x}$	d) $x-\frac{1}{x}$

مفاتيح الحل

4	3	2	1
d	a	b	a

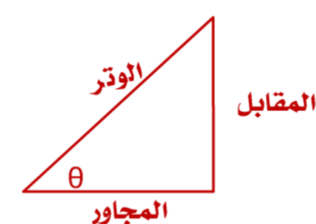
٥ حساب المثلثات

❶ الدوال المثلثية في المثلث القائم

$\text{Sin}\,\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

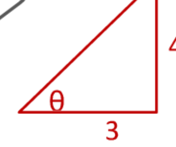


- مقلوب الـ $\sin\theta$ هو $\csc\theta$
- مقلوب الـ $\cos\theta$ هو $\sec\theta$
- مقلوب الـ $\tan\theta$ هو $\cot\theta$
- $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
- $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$



- **ملحوظة**

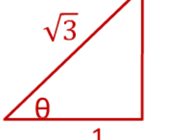
في أي مثلث قائم إذا عُلم طول ضلعين فيجب تعين الضلع الثالث باستخدام نظرية فيثاغورث



مثال1 أوجد $\cos\theta$ في المثلث

الحل لابد من إيجاد الضلع الثالث للمثلث بنظرية فيثاغورث $\sqrt{3^2+4^2} = 5$

$\cos\theta = \frac{3}{5}$



مثال 2 من الرسم أوجد $\cot\theta$

الحل لابد من إيجاد الضلع الثالث للمثلث

بنظرية فيثاغورث $\sqrt{\sqrt{3}^2 - 1^2} = \sqrt{2}$

$\tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{1}$

$\cot\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

❷ الدوال المثلثية للزوايا $60°$ و $45°$ و $30°$



$\cos\theta \quad \sin\theta$

- $30° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- $60° = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- $45° = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\tan\theta$

مثلاً

$cos30 = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , sin45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$, tan60 = \frac{\sqrt{3}}{2} \div \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{1}$

ملحوظة

يجب حفظ الدوال المثلثية للزوايا الخاصة بطريقة عكسية

مثلاً

إذا كان $cos\theta = \frac{1}{2}$ فإن $\theta = 60°$

إذا كان $\tan\theta = 1$ فإن $\theta = 45°$

مثال 3 أوجد قيمة x

الحل يمكن استعمال دالة الـ cos لوجود المجاور والوتر

$\cos 30 = \frac{x}{8}$

$x = 8\cos 30 = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

مثال4 من نقطة تبعد 100 m عن قاعدة برج وجد أن زاوية إرتفاع البرج هو 60 فماهو إرتفاع البرج

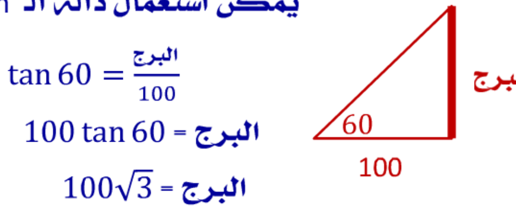
الحل

يمكن استعمال دالة الـ tan

$\tan 60 = \frac{\text{البرج}}{100}$

البرج = $100\tan 60$

البرج = $100\sqrt{3}$



عماد الجزيري

مؤلف كتاب المعاصر

❸ التحويل من الستيني إلى الدائري والعكس

للتحويل من الستيني للدائري نضرب الزاوية في $\frac{\pi}{180}$

للتحويل من الدائري إلى الستيني نضرب في $\frac{180}{\pi}$

مثال 5 ماهو قياس الزاوية 270 بالتقدير الدائري

الحل $270 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{2}$

مثال 6 ماهو قياس $\frac{\pi}{2} rad$ بالقياس الستيني

الحل $\frac{\pi}{2} \times \frac{180}{\pi} = 90°$

❹ الزاوية المرجعية

- هى الزاوية الحادة التي تزيد عن 180 أو تنقص عن 180 أو تنقص عن 360
- الزاوية المرجعية لزاوية حادة هى نفسها
- إذا كانت الزاوية سالبة فنضيف عليها 360 ونوجد المرجعية للزاوية الناتجة

مثال 7 ماهى الزاوية المرجعية للزاوية $240°$

الحل الزاوية 240 تزيد عن 180 بقيمة 60 فتكون المرجعية هى 60

مثال 8 ماهى قياس الزاوية المرجعية للزاوية -60

الحل نضيف 360 إلى -60 لتصبح الزاوية هى 300 وحيث أن 300 تنقص عن 360 بمقدار 60 فإن المرجعية هى 60

مثال 9 أوجد قيمة $sin150$

الحل نوجد المرجعية لـ 150 وهى 30

$$\sin 150 = +sin30 = \frac{1}{2}$$

ونختار الإشارة + لأن الزاوية 150 تقع في الربع الثاني وتكون الـ sin موجبة

مثال 10 أوجد قيمة $cos120$

الحل نوجد المرجعية لـ 120 وهى 60

$$\cos 120 = -cos60 = \frac{-1}{2}$$

ونختار الإشارة السالبة لان الزاوية 120 تقع في الربع الثاني وتكون فيها $\cos\theta$ سالبة

❺ الدورة والسعة للدوال المثلثية

- إذا كانت الدالة في الصورة $y = asinbx$ فإن السعة هى a وطول الدورة هو $\frac{360}{|b|}$
- إذا كانت الدالة في الصورة $y = acosbx$ فإن السعة هى a وطول الدورة هو $\frac{360}{|b|}$
- إذا كانت الدالة في الصورة $y = atanbx$ ليس لها سعة وطول الدورة هو $\frac{180}{|b|}$

مثال11 أوجد السعة وطول الدورة للدالة

$$y = 5sin3\theta$$

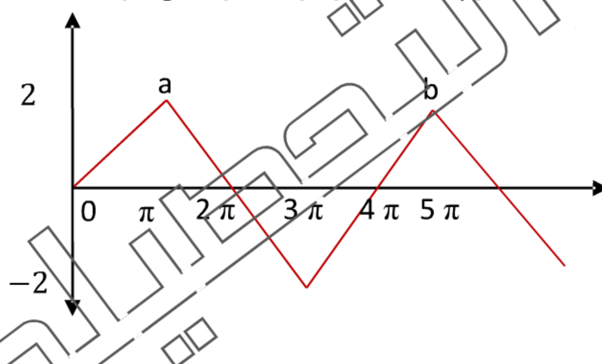
الحل السعة هى 5 وطول الدورة هو $\frac{360}{3} = 120$

مثال12 أوجد السعة وطول الدورة للدالة

$$y = 5tan3\theta$$

الحل الدالة ليس لها سعة وطول الدورة هو $\frac{180}{4} = 45°$

مثال 13 أوجد السعة وطول الدورة من الرسم

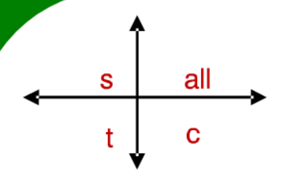


الحل طول الدورة على الرسم هو المسافة على محور x لأي نقطة تحركت دورة كاملة مثل النقطة a فهى تحركت من أعلى إلى أسفل وعادت إلى نفس المكان عند b وتكون المسافة على محور x هى إبتدأ من π إلى 5π وتكون قيمتها $5\pi - \pi = 4\pi$

السعة هي أقصى مسافة للدالة على محور y ويتضح من الرسم أنها 2

عماد الجزيري
مؤلف كتاب المعاصر

❻ اشارة الدوال المثلثية



- في الربع الأول جميع الدوال المثلثية موجبة
- في الربع الثاني sin ومقلوبها فقط موجب
- في الربع الثالث tan ومقلوبها فقط موجب
- في الربع الرابع cos ومقلوبها فقط موجب

مثال14 إذا كانت $\tan\theta = -3$ و $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{4}$

فماهو الربع الذي تقع فيه زاوية θ

الحل حيث ان cos موجبة فإن θ تقع في الربع الأول او الرابع

وحيث ان tan سالبة فإن θ تقع في الربع الثاني أو الرابع

وبذلك تصبح الدالتين مشتركتين في الربع الرابع

لذلك فإن θ تقع في الربع الرابع

- **ملحوظة**

إذا عُلمت دالة مثلثية واحدة فإنه يمكن إيجاد باقي الدوال المثلثية عن طريق عمل مثلث فيثاغورث واكمال باقي أضلاعه مع مراعاة الربع الواقعة فيه الزاوية

مثال15 إذا كان $cos\theta = \frac{-3}{5}$ ، $90 < \theta < 180$

أوجد $\tan\theta$

الحل

من فيثاغورث الضلع الثالث في المثلث هو 4

من المثلث $\tan\theta = \frac{4}{3}$ ولكن

θ تقع في الربع الثاني أي تكون الـ tan سالبة

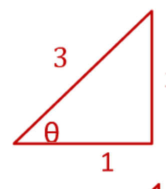
لذلك تصبح $tan\theta = \frac{-4}{3}$

❼ الدوال المثلثية لضعف الزاوية

- $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
- $cos2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
- $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

مثال 16 إذا كان $\cos\theta = \frac{-1}{3}$ وكان $90 < \theta < 180$

أوجد $\sin 2\theta$



الحل نصنع مثلث قائم ونكمل أضلاعه

$$x = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

وحيث ان θ تقع في الربع الثاني

فإن دالة الـ sin موجبة لكن cos سالب

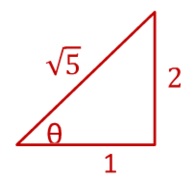
$$= 2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{-1}{3} = \frac{-4\sqrt{2}}{9}$$

مثال 17 إذا كان $\tan\theta = -2$ وكان $270 < \theta < 360$

أوجد $\cos 2\theta$

الحل نصنع مثلث قائم ونكمل أضلاعه

$$x = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$



وحيث أن θ تقع في الربع الرابع

فإن cos فقط موجبه

$$cos2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$cos2\theta = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{-3}{5}$$



عماد الجزيري

مؤلف كتاب المعاصر

❽ خصائص هامة للدوال المثلثية

- $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
- $\cos(-\theta) = +\cos\theta$
- $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

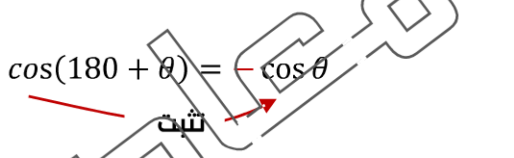
180 ، 360 زوايا تثبت الدالة المثلثية مع مراعاة إشارة الربع الواقعة فيها الزاوية الأصلية

مثلاً $\sin(180-\theta) = +\sin\theta$

تثبت

نختار الإشارة الموجبة لأن $180-\theta$ تقع في الر بع الثاني وتكون sin موجبة

مثلاً



نختار الإشارة السالبة لأن $180+\theta$ تقع في الر بع الثالث وتكون cos سالبة

مثال 18 أوجد قيمة $\tan(180-\theta)$

$a)\ \tan\theta$ $\quad b)\ -\tan\theta$ $\quad c)\ \cot\theta$ $\quad d)\ -\cot\theta$

الحل 180 زاوية تثبت الدالة أي أن الناتج هو tan

وحيث أن $180-\theta$ ربع ثاني فتكون الإشارة سالبة

وبذلك يصبح الحل هو b

90 ، 270 زوايا تغير الدالة المثلثية

$\sin \rightarrow\rightarrow \cos \quad , \tan \rightarrow\rightarrow \cot \quad , \sec \rightarrow\rightarrow \csc$

والعكس صحيح

مع مراعاة إشارة الربع الواقعة فيها الزاوية الأصلية

مثلاً $\cos(90+\theta) = -\sin\theta$

تغير

نختار الإشارة السالبة لأن $90+\theta$ تقع في الر بع الثاني وتكون cos سالبة

مثال 19 أوجد قيمة $\cos(90-\theta)$

$a)\ \sin\theta$ $\quad b)\ -\sin\theta$ $\quad c)\ \cos\theta$ $\quad d)\ \sec\theta$

الحل 90 زاوية تغير الدالة تجعل الـ cos تصبح sin وحيث أن الزاوية ربع أول فنختار الإشارة الموجبة

وبذلك تصبح الإجابة هى $a)\ \sin\theta$

❿ الدوال المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

- $\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A \sin B$

نفك بنفس الاشارة بين الزاويتين

- $\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A \sin B$

نفك بعكس الاشارة بين الزاويتين

- $\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$

في البسط بنفس الاشارة وفي المقام عكس الاشارة

يمكن استخدام هذه القوانين في إيجاد قيمة بعض الزوايا بدون الألة الحاسبة

مثل الزوايا 15 ، 75 ، 105

مثال 20 أوجد قيمة $\sin 75$

$a)\ \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad b)\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $\quad c)\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\quad d)\ \frac{\sqrt{6}}{2}$

الحل

$$\text{Sin } 75 = \sin(45+30) = \sin 45\cos 30 + \cos 45 \sin 30$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

مثال 21 أوجد قيمة $cos 15$

$a)\ \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad b)\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $\quad c)\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\quad d)\ \frac{\sqrt{6}}{2}$

الحل

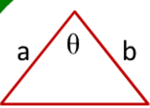
$$\cos(60-45) = \cos 60\cos 45 + \sin 60 \sin 45$$
$$\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

٠٥٥٣٤٦٧٩٤٠

عماد الجزيري

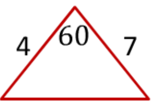
مؤلف كتاب المعاصر

⑪ مساحة المثلث



= $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب أي ضلعين × sin الزاوية بينهما

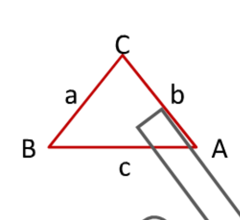
مثال 21 احسب مساحة المثلث



$$\frac{1}{2} \times 4 \times 7 \sin 60 = 2 \times 7 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$$



⑫ قانون الجيب



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

مثال 22 أوجد قيمة x من الرسم

الحل

$$\frac{x}{\sin 45} = \frac{12}{sin30}$$

$$x = \frac{12 \sin 45}{\sin 30}$$

$$x = \frac{12 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} == 12\sqrt{2}$$

مثال 23 أوجد قيمة θ

الحل

$$\frac{4\sqrt{6}}{\sin\theta} = \frac{8}{\sin 45}$$

$$sin\theta = \frac{4\sqrt{6}sin45}{8} = \frac{4\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{8}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{12}}{4}$$

$$\sin\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4}$$

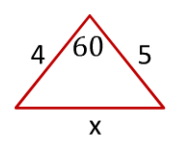
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \to\to \theta = 60°$$

⑬ قانون جيب التمام

يستخدم قانون جيب التمام لايجاد طول ضلع بشرط وجود ضلعين والزاوية المحصورة

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \cos\theta}$$

مثال 24 أوجد طول الضلع x



الحل

$$x = \sqrt{4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \cos 60}$$

$$x = \sqrt{16 + 25 - 20}$$

$$x = \sqrt{21}$$

⑭ حل المعادلات المثلثية

هو إيجاد كل قيم θ التي تحقق المعادلة

مثال 25 حل المعادلة $sin\theta = \frac{1}{2}$ حيث $0 \le \theta \le 360$

الحل نبحث عن الزاوية التي قيمة sin لها هى $\frac{1}{2}$ نجد أنها 30

وحيث أن sin موجبة في الربعين الأول والثاني لذلك

$\theta = 30$

$\theta = 180 - 30 = 150$

وتكون مجموعة الحل هى $\{30,150\}$

مثال 26 حل المعادلة $cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ حيث $0 \le \theta \le 360$

الحل نبحث عن الزاوية التي قيمة cos لها هى $\frac{\sqrt{3}}{2}$ نجد أنها 30

وحيث أن cos سالبة في الربعين الثالث والثاني لذلك

$\theta = 180 - 30 = 150$

$\theta = 180 + 30 = 210$

وتكون مجموعة الجل هى $\{210,150\}$

⑮ معكوس الدالة المثلثية

- $arc\ sin\theta = \sin^{-1}\theta$
- $arc\ cos\theta = \cos^{-1}\theta$
- $arc\ tan\theta = \tan^{-1}\theta$

مثال 27 ماقيمة $\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$

الحل نبحث عن الزاوية التى قيمة sin لها هى $\frac{\sqrt{2}}{2}$

نجد أنها الزاوية 45

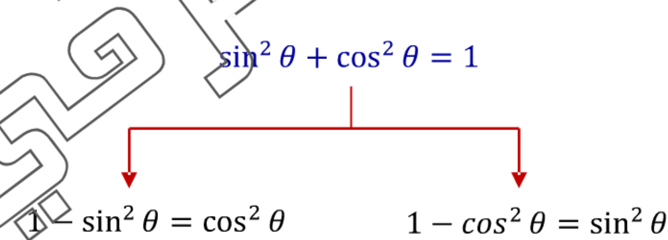
مثال 28 ماقيمة $\cos(\cos^{-1}\frac{1}{2})$

الحل اولاً نعين قيمة $\cos^{-1}\frac{1}{2}$ أي نبحث عن الزاوية

التي قيمة cos لها هو $\frac{1}{2}$ نجد أنها 60

ثانياً نعين قيمة $cos60$ وهي $\frac{1}{2}$

⑯ المتطابقات المثلثية



$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$ $\qquad$ $\sec^2\theta - tan^2\theta = 1$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

$\csc^2\theta - 1 = \cot^2\theta$ $\qquad$ $\csc^2\theta - cot^2\theta = 1$

تستخدم المتطابقات السابقة في تبسيط العبارات المثلثية كمايتضح من الأمثلة التالية

لتبسيط العبارات المثلثية نتبع الخطوات الأتية

1. محاولة جعل الدوال المثلثية sin و cos
2. نستخدم أحد قوانين المتطابقات السابقة
3. نفكر في التحليل – العامل المشترك – توحيد المقامات

مثال 29 تبسيط العبارة $\frac{sec\theta}{csc\theta}$

$a)\ sin\theta$ $\qquad$ $b)tan\theta$ $\qquad$ $c)\ cot\theta$ $\qquad$ $d)sec\theta$

الحل حيث أن $\csc\theta = \frac{1}{sin\theta}$ $\quad$ $sec\theta = \frac{1}{cos\theta}$

ويصبح المقدار $\frac{\sec\theta}{\csc\theta} = \frac{1}{\cos\theta} \div \frac{1}{\sin\theta} =$

$$\frac{1}{\cos\theta} \times \frac{\sin\theta}{1} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

مثال 30 العبارة التى تكافئ $\frac{cos\theta\ csc\theta}{\tan\theta}$

$a)\ sin\theta$ $\qquad$ $b)\tan^2\theta$ $\qquad$ $c)\ cot^2\theta$ $\qquad$ $d)sec^2\theta$

الحل حيث أن $\csc\theta = \frac{1}{sin\theta}$ $\quad$ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{cos\theta}$

ويصبح المقدار $\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \times \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \cot^2\theta$$

مثال 31 تبسيط العبارة $\frac{\sec\theta}{\sin\theta}(1 - \cos^2\theta)$

$a)tan\theta$ $\qquad$ $b)\tan^2\theta$ $\qquad$ $c)\ cos2\theta$ $\qquad$ $d)sec^2\theta$

الحل حيث أن $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$ و $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

يصبح المقدار $\frac{sec\theta}{\sin\theta}(\sin^2\theta)$

$$sec\theta \times \sin\theta = \frac{1}{\cos\theta} \times \sin\theta = \tan\theta$$

مثال 32 تبسيط العبارة $\cos^4\theta - \sin^4\theta$

$a)\ sin2\theta$ $\qquad$ $b)\tan^2\theta$ $\qquad$ $c)\ cos2\theta$ $\qquad$ $d)sec^2\theta$

الحل نقوم بتحليل المقدار

$$\cos^4\theta - \sin^4\theta = (cos^2\theta + sin^2\theta)(cos^2\theta - sin^2\theta)$$

وحيث أن $cos^2\theta + sin^2\theta = 1$ و $cos^2\theta - sin^2\theta = \cos 2\theta$

$$\cos^4\theta - \sin^4\theta = 1 \times cos2\theta$$



فيديو شرح التجميعات

تجميعة 1437

❶ اذا كان $\sin\theta = \frac{-1}{2}$ و $180 \le \theta \le 270$

أوجد θ

a) 30	b) 45	c) 60	d) 210

❷ ما قيمة $\sin 150$

a) $\frac{1}{2}$	b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	d) 1

❸ اذا كان $sinx = cos50$ أوجد قيمة x

a) 40	b) 50	c) 10	d) 90

❹ اوجد قيمة $sin^4\theta - cos^4\theta$

a) $\cos 2\theta$	b) $-\cos 2\theta$	c) $\sin\theta$	d) $\cos\theta$

❺ ماقيمة $csc^2\theta - cot^2\theta$

a) 1	b) -1	c) $\cot\theta$	d) $\tan\theta$

❻ ماقيمة $\sin 15$

a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	b) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	d) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

تجميعة 1436

❼ ماقيمة

$$\sin(60+\theta)\cos\theta - \cos(60+\theta)\sin\theta$$

a) 1	b) $\frac{1}{2}$	c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

❽ إذا كان $\sin^{-1}\cos\theta = \frac{\pi}{6}$ و $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

أوجد قيمة θ

a) 30	b) 60	c) 45	d) 120

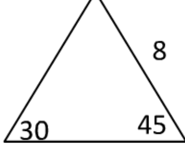
تجميعة 1436

❾ إذا كان $\sin\theta + \cos\theta = \frac{7}{5}$ حيث أن $0 < \theta < 90$

فإن $sin2\theta$ يساوي

a) $\frac{24}{25}$	b) $\frac{-24}{25}$	c) $\frac{-2}{5}$	d) $\frac{4}{5}$

❿ من خلال المثلث المقابل أوجد طول الضلع المقابل للزاوية 45



a) $8\sqrt{2}$	b) $2\sqrt{3}$	c) $8\sqrt{3}$	d) 16

تجميعة 1435

⓫ أي الدوال الأتية سعتها 3 وطول دورتها 72

a) $y = 3\cos 5\theta$ b) $y = 5\cos 3\theta$

c) $y = 3\tan 5\theta$ d) $y = \cos 3\theta$

⓬ أي ممايلى يكافئ

$$tan^2\theta(cot^2\theta - cos^2\theta)$$

a) $sin^2\theta$	b) $cos^2\theta$	c) $tan^2\theta$	d) $cot^2\theta$

⓭ أي ممايلى لايكافئ $cos\theta$

a) $\cot\theta\sin\theta$	b) $\frac{cos\theta}{cos^2\theta+sin^2\theta}$
c) $tan\theta csc\theta$	d) $\frac{1-sin^2\theta}{cos\theta}$

⓮ ماقيمة

$$\sin(60+\theta)\cos\theta - \cos(60+\theta)\sin\theta$$

a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$	b) $\frac{1}{2}$	c) $\sqrt{3}$	d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

مفاتيح الحل

14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
d	c	b	a	a	a	b	d	a	a	b	a	a	d

⑥ الأسس و اللوغاريتمات

❶ المعادلة الأسية

إذا كان الأساس = الأساس فإن الأس = الأس

مثال 1 إذا كان $3^{x-1} = 27$ فإن قيمة x هي

$a)\ 3$ $\quad b) -4$ $\quad c)\ 5$ $\quad d) 6$

الحل

حيث أن $27 = 3^3$ فإن $3^{x-1} = 3^3$

الأساس = الأساس فإن $x - 1 = 3$

أي أن $x = 4$

مثال 2 إذا كان $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 32$ فإن قيمة x هي

$a)\ 3$ $\quad b) -4$ $\quad c)\ 5$ $\quad d) 6$

الحل حيث أن $32 = 2^5$ فإن المقدار يصبح

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 2^5 \to\to \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$$

الأساس = الأساس فإن $x - 1 = -5$

أي أن $x = -4$

❷ المتباينة الأسية

إذا كان $b^x > b^y$ فإن $x > y$ بشرط b أكبر من 1

إذا كان $b^x > b^y$ فإن $x < y$ بشرط b أصغر من 1

مثال 3 إذا كان $3^x \leq 9$ فإن قيمة x هي

$a)\ x \leq 9$ $\quad b) x \leq 2$ $\quad c) x \geq 2$ $\quad d) x = 3$

الحل

$$3^x \leq 9 \quad \to\to \quad 3^x \leq 3^2$$
$$x \leq 2$$

مثال 4 إذا كان $\left(\frac{1}{5}\right)^x \leq 125$ فإن قيمة x هي

$a)\ x \leq 5$ $\quad b) x \leq -3$ $\quad c) x \geq -3$ $\quad d) x = 3$

الحل

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x \leq 5^3 \quad \to\to \quad \left(\frac{1}{5}\right)^x \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$$
$$x \geq -3$$

تدريب أي مما يلي هو حلاً للمعادلة

$$27\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = 125$$

a) -4	b) -2	c) 2	d) 4

❷ التحويل من الأسية إلى اللوغارتمية و العكس

✓ التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغارتمية

إذا كان $b^y = x$ فإن $\log_b x = y$

مثال 5 الصورة اللوغارتمية المكافئة للصورة $2^5 = 32$ هي ....

الحل الصورة اللوغارتمية $\log_2 32 = 5$

✓ التحويل من الصورة اللوغارتمية إلى الصورة الأسية

إذا كان $\log_b x = y$ فإن $b^y = x$

مثال 6 الصورة الأسية المكافئة للصورة $\log_2 8 = 3$

الحل الصورة الأسية $2^3 = 8$

٠٥٥٣٤٦٧٩٤٠

❸ خصائص اللوغاريتمات



مهما كانت قيمة b

- $\log_b 1 = 0$
- $\log_b b = 1$
- $\log_b b^x = x$
- $\log_b x^y = y \ \log_b x$
- $\log 10 = 1$

عند عدم وجود اساس فنعتبره 10

مثال 7 أوجد قيمة اللوغاريتمات الآتية

❶ $\log 1000$
❷ $\log 0,01$
❸ $\log_4 64$

الحل

❶ $\log 1000 = \log 10^3 = 3$

❷ $\log 0,01 = \log \frac{1}{100} = \log 10^{-2} = -2$

❸ $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$



❹ جمع اللوغاريتمات

$$\log_b x + \log_b y = \log_b xy$$

2 لوغ جمع = لوغ واحد ضرب

مثال 8 أوجد قيمة $\log_{27} 3 + \log_{27} 9$

الحل نطبق قانون جمع اللوغاريتمات

$\log_{27} 3 + \log_{27} 9 = \log_{27}(3 \times 9)$

$\log_{27} 27 = 1$

❺ طرح اللوغاريتمات

$$\log_b x - \log_b y = \log_b \frac{x}{y}$$

2 لوغ طرح = لوغ واحد قسمة

مثال 9 أوجد قيمة $\log_5 100 - \log_5 4$

الحل $\log_5 100 - \log_5 4 = \log_5 \frac{100}{4}$

$\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$

مثال 10 إذا كان $\log_2 3 = 1{,}5849$ و $\log_2 5 = 2{,}3219$

أوجد قيمة $\log_2 45$ ، $\log_2 \frac{25}{9}$

الحل نحاول تحليل العدد 45 إلى 5 و 3 نجد أن

45 = 3×3×5 وبذلك يصبح المقدار

$\log_2 45 = \log_2 3 \times 3 \times 5 =$

نستخدم قانون جمع اللوغاريتمات ثم نعوض

$\log_2 3 + \log_2 3 + \log_2 5 = 1{,}5849 + 1{,}5849 + 2{,}3219$

$= 5{,}4917$

$\log_2 \frac{25}{9} = \log_2 25 - \log_2 9$

$\log_2 5^2 - \log_2 3^2 = 2\log_2 5 - 2\log_2 3$

$= 2(2{,}3219) - 2(1{,}5849) = 1{,}474$

❻ طرق حل المعادلات اللوغارتمية



حذف اللوغاريتم من الطرفين إذا كانت المعادلة تحتوي على اللوغاريتم في الطرفين	التحويل إلى الصورة الأسية إذا كانت المعادلة تحتوي على اللوغاريتم في طرف واحد

مثال 11 حل المعادلة $\log_4 x = \log_4 3 + \log_4 5$

الحل نستخدم قانون جمع اللوغاريتمات

$\log_4 x = \log_4(3 \times 5)$

نحذف اللوغاريتم من الطرفين لينتج

$x = 15$

مثال 12 حل المعادلة $\log_5 x = 2\log_5 3 - \log_5 2$

الحل $\log_2 x = \log_2 3^2 - \log_5 2$

$$\log_2 x = \log_2 \frac{9}{2}$$

$x = \frac{9}{2} = 4{,}5$

مثال 13 حل المعادلة $\log_3 x = 2$

الحل لابد من التحويل إلى الصورة الأسية

$3^2 = x$

$x = 9$

❻ حل المتباينة اللوغارتمية

حذف اللوغاريتم من الطرفين إذا كانت المتباينة تحتوي على اللوغاريتم في الطرفين	التحويل إلى الصورة الأسية إذا كانت المتباينة تحتوي على اللوغاريتم في طرف واحد

مثال 14 حل المتباينة $\log_2 x > 3$

الحل حيث أن اللوغاريتم في طرف واحد نحول إلى أسية

$x > 2^3 \quad \rightarrow\rightarrow \quad x > 8$

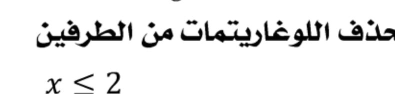
مثال 15 حل المتباينة $\log_4 x \le \log_4 12 - \log_4 6$

الحل نستخدم قانون طرح اللوغاريتمات

$$\log_4 x \le \log_4 \frac{12}{6}$$

نحذف اللوغاريتمات من الطرفين

$x \le 2$



وحيث أن مجال اللوغاريتم هو

$x > 0$

فإن $2 \ge x > 0$

٠٥٥٣٤٦٧٩٤٠

عماد الجزيري

مؤلف كتاب المعاصر



فيديو شرح التجميعات

تجميعات 1437

❶ ماناتج المقدار

$$\log_5(x+1) + \log_5 x - 2\log_5(x+1)$$

a) $\log_5 \frac{x}{x+1}$	b) $\log_5 x$
c) $\log_5 \frac{x+1}{x}$	c) $\log_5 x^2$

❷ وجد قيمة $\log_2(\log x^{24}) - \log_2(\log x^3)$

a) $\log_2 x$	b) $\log_2 x^{21}$	c) 3	d)1

❸ إذا كان $\log_4 5 = 1{,}16$ ، فإن $\log_4 100$ هو

a) 3,32	b) 4	c) 25	d) 2,32

❹ أوجد قيمة $3\log_3 9 - \log_5 \frac{1}{25}$

a) 8	b) 6	c) 5	d) 9

❺ أوجد قيمة $\log_6 \sqrt[3]{36}$

a) $\frac{2}{3}$	b) $\frac{1}{3}$	c) 1	d) 6

❻ أوجد حل المعادلة

$$2\log_5 x = \log_5 27 + \log_5 3$$

a) 3	b) 9	c) - 9	d) 2

❼ ما ناتج $\log_2 x + 5\log_2 y - 3\log_2 z$

a) $15\log_2 xy$	b) $\log \frac{xy}{z}$	c) 2	d) $\log_2 \frac{xy^5}{z^3}$

❽ إذا كانت $3^{x-1} = 27$ فإن قيمة x هي

a) $x = 4$	b) $x = 3$	c)) $x = 1$	d) $x = 1$

تجميعات 1436

❾ إذا كان $3^{x+2} \geq 9$ فأي الأتي صحيح

a) $x \geq 5$	b) $x \geq 1$	c) $x \geq 0$	d) $x \leq 1$

❿ ماهى الصورة المختصره للمقدار

$$3\log_5 x - 4\log_5 y + 2\log_5 z$$

a) $\log_5 \frac{x^3z^2}{y^4}$	b) $\frac{x^3z^2}{y^4}$
c) $\log_5 \frac{x^2y^4}{z^2}$	d) $\log_5 x^3y^4z^2$

⓫ إذا كان

$\log_2 3 = b$ و $\log_2 5 = a$ أوجد قيمة $\log_2 \frac{25}{9}$

a) $\frac{a^2}{b^2}$	b) $\frac{2a}{b}$	c) $\frac{b}{a}$	d) 2(a-b)

تجميعات 1435

⓬ ماقيمة x في المعادلة $\log_8 16 = x$

a) 2	b) $\frac{4}{3}$	c) $\frac{3}{4}$	d) $\frac{1}{2}$

⓭ ماقيمة $\log_2 \frac{1}{32}$

a) -5	b) $\frac{-1}{5}$	c) $\frac{1}{5}$	d) 5

⓮ حل المعادلة $\log_2(x^2 - 4) = \log_2 3x$ هو

a)4	b) 2	c) -1	d) -2

⓯ مامقطع y للدالة $y = 4^x - 1$

a)4	b) 1	c) -1	d) 0

مفاتيح الحل

15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
d	a	a	b	d	b	c	a	d	b	a	a	a	c	a

٧ المصفوفات و المحددات

❶ رتبة المصفوفة و عناصرها

رتبة المصفوفة عدد الصفوف $m \times$ عدد الأعمدة n

عنصر المصفوفة يتم تحديده برقم الصف ثم رقم العمود

مثلاً رتبة المصفوفة $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

هو 2×3 لأن عدد الصفوف 2 وعدد الأعمدة 3

العنصر a_{23} يعني العنصر الموجود في الصف الثاني

والعمود الثالث فيصبح $a_{23} = 4$

❷ تساوي مصفوفتين

عند تساوي مصفوفتين فإن العناصر المتناظرة متساوية

مثال 1 أوجد قيمة x , y $\begin{bmatrix} 3 & x-4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & y+1 \end{bmatrix}$

الحل كل العناصر المتناظرة متساوية

$$x - 4 = 5 \quad \to \quad x = 9$$

$$y + 1 = -2 \quad \to y = -3$$

❸ جمع وطرح المصفوفات

- عند جمع أو (طرح) المصفوفات من نفس الرتب لابد من جمع أو (طرح) العناصر المتناظرة
- عند ضرب عدد في مصفوفة يتم ضربه في جميع عناصرها

مثال 2 أوجد ناتج $2\begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$

الحل يتم ضرب 2 في جميع عناصر المصفوفة الأولى

ويتم ضرب 3- في جميع عناصر المصفوفة الثانية

$$\begin{bmatrix} -10 & 12 \\ 6 & 4 \\ -8 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -12 & 0 \\ 9 & -24 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -16 & 15 \\ -6 & 4 \\ 1 & -22 \end{bmatrix}$$



❹ ضرب المصفوفات

٠٥٥٣٤٦٧٩٤٠

يمكنم ضرب المصفوفات بشرط

عدد أعمدة الأولى = عدد صفوف الثانية

مثلا

$A_{2\times3} \times B_{3\times1}$ الضرب ممكن لأن أعمدة الأولى 3 وصفوف الثانية 3

وتكون المصفوفة الناتجة من رتبة 2×1

$A_{2\times3} \times B_{2\times1}$ الضرب غير ممكن لأن أعمدة الأولى 3 وصفوف الثانية 2

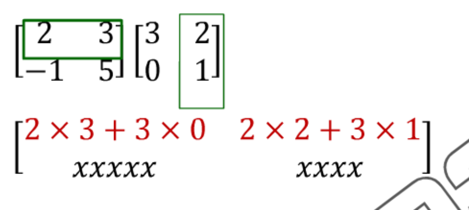
مثال 3 أوجد ناتج $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

الحل اولاً يتم ضرب الصف الأول في العمود الأول

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2\times3+3\times0 & xxxxx \\ xxxxx & xxxx \end{bmatrix}$$

يتم ضرب الصف الأول في العمود الثاني



$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2\times3+3\times0 & 2\times2+3\times1 \\ xxxxx & xxxx \end{bmatrix}$$

بالمثل يتم ضرب الصف الثاني في العمود الاول ثم الصف الثاني في العمود الثاني

$$\begin{bmatrix} 2\times3+3\times0 & 2\times2+3\times1 \\ -1\times3+5\times0 & -1\times2+5\times1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

عماد الجزيري
مؤلف كتاب المعاصر

٥ المحددات

طريقة فك المحددة من الدرجة الثانية

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (a\times d)-(b\times c)$$

مثال 4 أوجد قيمة المحددة $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$

الحل $(2\times -3)-(4\times 5) = -26$

طريقة فك المحددة من الدرجة الثالثة

نكرر العمود الأول والثاني ثم نجمع الأقطار الرئيسية والأقطار الفرعية ونطرحها

مثال 5 اوجد ناتج المحددة $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

الحل

$$\left|\begin{matrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{matrix}$$

مجموع الأقطار الرئيسية

$$(1\times 0\times 5)+(3\times 0\times 1)+(-1\times 2\times 4) = -8$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{matrix}$$

مجموع الأقطار الفرعية

$$(3\times 2\times 5)+(1\times 0\times 4)+(-1\times 0\times 1) = 30$$

الناتج $(-8)-(30) = -38$

٦ مساحة المثلث

المثلث الذي رؤوسه (e,f)و (c,d)و (a,b) تكون المساحة هى

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

مثال 6 اوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه هى

$(0,0)$ $(3,0)$و $(1,2)$و

الحل

$$\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

مجموع الأقطار الرئيسية

$$(1\times 0\times 1)+(2\times 1\times 0)+(1\times 3\times 1) = 3$$

مجموع الأقطار الفرعية

$$(1\times 3\times 1)+(1\times 1\times 5)+(1\times 0\times 4) = 8$$

مساحة المثلث $=2,5$ $\left|\frac{1}{2}[(3)-(8)]\right|$

٧ النظير الضربي للمصفوفة

يكون للمصفوفة نظير ضربي إذا كانت قيمة المحددة لها $\neq$ صفر

مثلاً المصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ليس لها نظير لأن قيمة المحددة = صفر $(2\times 3)-(1\times 6) = 0$

المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ يكون نظيرها الضربي هو

$$\frac{1}{\text{المحددة}}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

مثال 7 أوجد النظير الضربي للمصفوفة $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

الحل قيمة المحددة $7 = (3\times 4)-(1\times 5) =$

النظير الضربي $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{-5}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$

مثال 8 إذا لم يكن للمصفوفة نظير فماقيمة x

$$\begin{bmatrix} 4 & 12 \\ x & 9 \end{bmatrix}$$

الحل لأن المصفوفة ليس لها نظير فإن قيمة المحددة = 0

$$(4\times 9)-(12\times x) = 0$$

$$12x = 36 \rightarrow x = \frac{36}{12} = 3$$

تدريب إذا كانت المصفوفة $\begin{bmatrix} x+1 & x \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ ليس لها نظير فماقيمة x



عماد الجزيري

مؤلف كتاب المعاصر



فيديو شرح التجميعات

تجميعات 1437

❶ أوجد قيمة $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

a) 164	b) -164	c) 94	d) -94

❷ ماناتج $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

a) $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$	b) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$
c) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$	d) $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

تجميعات 1436

❸ أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه هي

$$a(0,0)\ ,b(-2,8)\ ,c\ (4,12)$$

a) 56	b) 40	c) 22	d) 12

❹ إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} ,B \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

ماهى العملية الجبرية التي تتم على A , B لينتج

$$\begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 10 & 11 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

a) A + B	b) 2A + B	c) A - B	d) A+ 2B

تجميعات 1435

❺ إذا كان $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ فإن $A \cdot A =$

a) $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$	b) $\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$
c) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$	d) $\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

❻ ما النظير الضربي للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$	b) $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$
c) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$	d) $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

❼ إذا كانت المصفوفة $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ -2 & 8 \end{vmatrix}$ ليس لها نظير

فماقيمة x

A) $\frac{4}{3}$	b) $\frac{4}{5}$	c) $\frac{-4}{3}$	d) $\frac{-4}{5}$

❽ جد ناتج $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$ إذا كان ذلك ممكناً

a) $\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$	b) $[-3]$
c) الضرب غير معرف	d) $[11]$

مفاتيح الحل

8	7	6	5	4	3	2	1
d	d	b	b	b	a	a	b

٨ المتتابعات

المتتابعة الحسابية

❶ الحد النوني للمتتابعة الحسابية

المتتابعة الحسابية هى مجموعة من الحدود المرتبة بشرط أن الفرق بين أي حدين متتاليين هو مقدار ثابت

- المقدار الثابت يسمى أساس المتتابعة ورمزه d
- الحد الأول في المتتابعة هو a_1
- الحد النوني للمتتابعة هو a_n
- n هو رتبة أي حد

الحد النوني هو $a_n = a_1 + (n-1) \times d$

مثال 1 أوجد الحد الثاني عشر في المتتابعة

$1, 4, 7, 10, 13, \dots\dots$

الحل $a_{1=1}$, $d = 3$, $n = 12$

$a_n = a_1 + (n-1) \times d$

نعوض في القانون

$a_{12} = 1 + (12-1) \times 3 = 34$

مثال 2 اكتب صيغة الحد النوني للمتتابعة

$10, 8, 6, 4, \dots\dots\dots$

الحل $a_1 = 10$, $d = -2$

$a_n = a_1 + (n-1) \times d$

$10 + (n-1) \times (-2)$

$10 - 2n + 2 = 12 - 2n$

❷ الأوساط الحسابية

كل حدود المتتابعة الحسابية أوساط حسابية ماعدا الأول و الأخير ولتعينها لابد من إيجاد قيمة d

$$d = \frac{\text{الحد الأخير} - \text{الأول}}{\text{رتبة الاخير} - 1}$$

مثال3 ماهى الحدود التي تصلح أن تكون أوساط حسابية بين الحدود

$1, \dots\dots\dots\dots, 13$

a) 2,5,8　　b)3,6,9　　c)4,7,10　　d)5,8,11

الحل 3 أوساط + الأول والأخير

عدد الحدود كلها هو 5

$$d = \frac{13-1}{5-1} = \frac{12}{4} = 3$$

نضيف 3 إلى الحد الأول كى نحصل على الأوساط

4,7,10

❸ مجموع حدود المتتابعة الحسابية

يمكن جمع عدد n من حدود المتتابعة الحسابية

$$s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

مثال 5 أوجد مجموع أول 20 عدد فردي

الحل

الأعداد الفردية هى

$1,3,5, \dots\dots\dots\dots\dots$

$a_1 = 1$, $d = 2$, $n = 20$

$$s_{20} = \frac{20}{2}(2 + 19 \times 2) = 400$$

المتتابعات الهندسية

المتتابعة الهندسية هى مجموعة من الحدود المرتبة بشرط أن قسمة أي حد على ماقبله يعطي مقدار ثابت يسمى أساس المتتابعة ورمزه r

مثال 6 أي مايلي هو متتابعة هندسية

a) 5,10,15　　b)1,4,8　　c)3,9,27　　d)5,8,11

الحل

المتتابعة الهندسية هى c)3,9,27

لأن كل حد يتم ضربه في 3 ليعطي مابعده

❹ الحد النوني للمتابعة الهندسية

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

مثال 7 اوجد الحد الخامس في المتتابعة الهندسية

$4, 8, 16, \dots\dots\dots\dots$

الحل $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$= 4 \cdot (2)^4 = 4 \cdot 16 = 64$

عماد الجزيري

مؤلف كتاب المعاصر

مثال 8 أي مما يلي هو الحد النوني $3,9,27, \dots \dots ..$

$a)\ 3^n \qquad b) 3^{n-1} \qquad c) 9^n \qquad d) 3n$

الحل نستخدم طريق التجربة ونعوض عن n بـ 1 ثم 2 ثم 3

نجد أن a هو الحل الصحيح لأن لو عوضنا عن n بـ 1 ينتج 3 ثم نعوض عن n بـ 2 ينتج 9 ونعوض عن n بـ 3 ينتج 27

❺ مجموع حدود المتتابعة الهندسية

يمكن جمع عدد n من حدود المتتابعة الهندسية

$$s_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1-r}$$

مثال 9 أوجد ناتج $2+4+8+\cdots \dots \dots \dots \dots + 32$

الحل $a_1 = 2 \quad a_n = 32 \quad r = 2$

$$s_n = \frac{2-32\cdot 2}{1-2} = \frac{-62}{-1} = 62$$

❻ المتتابعة الهندسية الغير منتهية

هناك نوعان من المتتابعات الهندسية الغير منتهية

- المتتابعة الهندسية التقاربية $-1 < r < 1$
- المتتابعة الهندسية التباعدية $r \ge 1$ أو $r \le -1$

مثال 10 أي المتتابعات الأتية تقاربية

$a)\ 2,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4}, \dots \dots \dots \dots \qquad b) 2,4,6, \dots \dots \dots \dots \dots$

$c) 3,6,12, \dots \dots \dots \dots \qquad d) -5,-10,-50, \dots \dots \dots$

الحل

المتتابعة التقاربية هى $a)$ لأن أساسها $r = \frac{1}{2}$

❼ جمع المتتابعة الهندسية إلى ∞

يمكن جمع المتتابعة الهندسية التقاربية إلى ∞ من الحدود بالقانون $s_\infty = \frac{a_1}{1-r}$

مثال 11 أوجد مجموع حدود متتابعة هندسية لانهائية حدها الأول 15 وأساسها $\frac{1}{2}$

الحل $a_1 = 15 \qquad r = \frac{1}{2}$

$$s_\infty = \frac{15}{1-\frac{1}{2}} = \frac{15}{\frac{1}{2}} = 30$$

مثال 12 أوجد $\sum_{k=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

الحل عند وضع $k = 1$ نحصل على a_1

$$a_1 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{1-1} = 2$$

$$r = \frac{1}{3}$$

$$s_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$$

❽ العدد الدوري

يمكن كتابة العدد الدوري في صورة كسر إعتيادي كمايلي في المثال

مثال 13 أكتب $0,\overline{12}$ في صورة كسر إعتيادي

الحل $0,\overline{12} = 0,12121212121212$

$0,12 + 0,0012 + 0,000012 + \cdots \dots \dots$

وهى متتابعة هندسية إلى ∞ حدها الأول

$$a_1 = 0,12 \qquad r = 0,01$$

$$s_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{0,12}{1-0,01} = \frac{0,12}{0,99} = \frac{12}{99}$$

❾ مفكوك ذات الحدين

$$(x+y)^n$$

عدد حدود المفكوك هو $n+1$

أي حد رقمه r من حدود المفكوك هو

$$C_{r-1}(x)^{n-r+1}(y)^{r-1}$$

مثال 14 أوجد الحد الثالث في مفكوك $(x+4)^5$

الحل الحد الثالث هو

$$5c_2(x)^3(4)^2$$

$$\frac{5\times 4}{2\times 1}\cdot x^3 \cdot 16 = 160x^3$$



فيديو شرح التجميعات

تجميعات 1437

❶ مارقم الحد الذي معاملة 56 في مفكوك

$$\left(\frac{1}{x}+x\right)^8$$

a) 3	b) 4	c) 5	d) 6

❷ متتابعة هندسية مجموع حدودها الثلاثة الأولى هو 26 ومجموع الحدود الثلاثة التالية هو 702 كم يكون أساسها

a) $\frac{1}{27}$	b) $\frac{1}{3}$	c) 3	d) 27

❸ ماقيمة $\sum_{n=4}^{18}(6n-1)$

a) 750	b) 975	c) 1100	d) 1150

❹ متتابعة هندسية $8,6,\frac{9}{2}, \frac{27}{8}, \dots\dots\dots,$ أوجد حدها الخامس

a) $\frac{81}{32}$	b) $\frac{32}{81}$	c) $\frac{243}{16}$	d) 81

تجميعات 1436

❺ الحد رقم 100 في المتتابعة

$9, 16, 23, 30, \dots\dots\dots$

a) 260	b) 340	c) 650	d) 702

❻ متتابعة حسابية $43,39,35, \dots\dots\dots$ فإن العدد 7 يكون الحد رقم

a) 8	b) 90	c) 10	d) 11

❼ في المتتابعة $4,8,16,32, \dots\dots\dots$ ما هو الأساس

a) 2	b) 3	c) 4	d) $\frac{1}{2}$

❽ ماقيمة $\sum_{n=3}^{17}(2x-1)$

a) 285	b) 230	c) 125	d) 320

❾ أوجد الحد قبل الأخير في مفكوك

$$\left(25x+\frac{1}{5}\right)^5$$

a) $\frac{1}{25}x$	b) $5x$	c) $\frac{1}{5}x$	d) $25x^2$

تجميعات 1435

❿ صيغة الحد النوني للمتتابعة الهندسية الأتية $5,10,20,40,80, \dots\dots$ هو

a) $a_n=5^n$	b) $a_n=5\cdot 2^{n-1}$
c) $a_n=2\cdot 5^{n-1}$	d) $a_n=5\cdot 2^n$

⓫ العبارة $1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ تكافئ

a) $\sum_{k=1}^{3} k^{-k}$	b) $\sum_{k=1}^{3} k^{\frac{1}{k}}$
c) $\sum_{k=1}^{3}\sqrt{k}$	d) $\sum_{k=1}^{3} k^k$

⓬ اي المتسلسلات الأتية غير تقاربية

a) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$	b) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$
c) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$	c) $\sum_{k-1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$

مفاتيح الحل

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
b	b	d	c	a	a	c	d	a	b	c	d

❶ قيمة الدالة عند نقطة

مثال 1 إذا كان $f(x) = 5x + 4$ أوجد $f(2)$

الحل يتم التعويض عن كل $x = 2$

لتصبح الدالة $f(2) = 5(2) + 4 = 14$

مثال 2 إذا كان $f(x) = x^2 - 5x$ أوجد $f(2a)$

الحل $f(2a) = (2a)^2 - 5(2a)$

$f(2a) = 4a^2 - 10a$

مثال 3 $f(x) = \begin{cases} x+4 & x < 2 \\ x^2+1 & x \geq 2 \end{cases}$

أوجد $f(3)$

الحل حيث أن العدد 3 يوجد ضمن قيم $x \geq 2$

لذلك نعوض في الدالة الثانية فقط

$f(3) = 3^2 + 1 = 10$

❷ درجة وحيدة الحد

هى مجموع الأسس فوق المتغيرات

مثلاً درجة وحيدة الحد $5x^4y^3$ هى 7

❸ درجة كثيرة الحدود

هى درجة أعلى وحيدة فيها ويسمى معاملها بالمعامل الرئيسي

مثلاً درجة كثيرة الحدود $7x^3 + 4x^2 - 5x + 2^7$

الدرجة 3 والمعامل الرئيسي 7

❹ تبسيط العبارات الجبرية

عند ضرب الأساسات المتشابهة نجمع الأسس

عند قسمة الأساسات المتشابهة نطرح الأسس

مثلاً عند تبسيط العبارة $(2x^{-3}y^3)(-7x^5y^{-6})$

نضرب العدد في العدد وفي الاساسات المتشابهة نجمع الاسس $2 \cdot (-7)x^{-3+5}y^{3-6}$

$-14x^2y^{-3} = \frac{-14x^2}{y^3}$

مثلاً تبسيط العبارة $\frac{20a^5b^3}{4a^2b^7}$ هو $\frac{5a^3}{b^4}$

❺ العمليات على كثيرات الحدود

- عند جمع او طرح كثيرات الحدود نجمع الحدود المتشابهة فقط
- عند الضرب نستخدم طريقة التوزيع وعند ضرب الحدود المتشابهة نجمع الأسس
- عند القسمة محاولة التحليل أو أخذ العامل المشترك ثم التبسيط بسطاً مع مقاماً

مثال 4 بسط العبارة $(5x^2 - 2x + 1) - (3x^2 - 7x + 3)$

الحل يتم توزيع الإشارة السالب على القوس ثم نجمع الحدود المتشابهة

$5x^2 - 2x + 1 - 3x^2 + 7x - 3 =$
$2x^2 + 5x - 2$

مثال 5 بسط العبارة $\frac{1}{2}x^3(4x^2 + 6x - 2)$

الحل $2x^5 + 3x^4 - x^3$

مثال 6 إذا كان $f(x) = 5x^2 - 1$

$g(x) = 5x^2 + 1$

أوجد $(f \cdot g)(x)$

الحل $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (5x^2 - 1)(5x^2 + 1)$

$= 25x^4 - 1$

❻ العمليات على العبارات النسبية

العبارة النسبية تكون مكونه من بسط ومقام وتكون غير معرفة عند القيم التي تجعل المقام = صفر

مثال 7 ماهى قيم x التي تجعل الدالة غير معرفة

$f(x) = \frac{x+3}{(x+2)(x-5)}$

الحل الأعداد التي تجعل المقام = صفر هى 5 ، -2

لذلك تكون الدالة غير معرفة عند 5 ، -2

مثال 8 العبارة $\frac{x-5}{x^2-25}$ تكون غير معرفة عند.........

الحل يكون المقام = صفر

$$x^2-25=0 \to\to\to (x-5)(x+5)=0$$

$x=5$ أو $x=-5$

وبذلك تصبح العبارة غير معرفة عند $\{5,-5\}$

- $L.C.M$ هو المضاعف المشترك الأصغر للمقادير وكي نحصل عليه يجب تحليل كلاً منها إلى عوامل ثم نأخذ من العوامل ماهو مشترك بأكبر أس والغير مشترك

مثال 9 أوجد $L.C.M$ للمقادير

$20x^2y^4$, $15\,xy^3$, $10x^3z$

الحل نقوم بتحليل الأعداد 20 ، 15 ، 10

2	10	15	20
5	5	15	10
3	1	3	2
2	1	1	2
	1	1	1

$$L.C.M = 2.5.2.3x^3y^4z$$

- عند جمع وطرح العبارات النسبية لابد من توحيد المقامات

مثال 10 تبسيط العبارة $\frac{3}{2ab}-\frac{1}{a}$ هو ....

الحل لتوحيد المقامات نضرب المقدار الثاني في $2b$

$$\frac{3}{2ab}-\frac{1}{a}\times\frac{2b}{2b}$$

$$=\frac{3-2b}{2ab}$$

مثال 11 أوجد ناتج $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a-1}$

الحل نضرب الحد الأول في $(a-1)$

ونضرب الحد الثاني في $(a+1)$

$$\frac{a-1}{a-1}\cdot\frac{1}{a+1}+\frac{a+1}{a+1}\cdot\frac{1}{a-1}$$

$$\frac{a-1+a+1}{(a-1)(a+1)}=\frac{2a}{(a-1)(a+1)}$$

- عند ضرب أو قسمة العبارات النسبية لابد من التحليل بسطاً ومقاماً ثم الحذف

مثال 12 بسط العبارة الأتية $\frac{25a^3b^4}{8c^2}\cdot\frac{16c}{5a^2b^7}$

الحل نختصر a^3 مع a^2 ويبقى a في البسط

نختصر b^4 مع b^7 ويبقى b^3 في المقام

نختصر c مع c^2 ويبقى c في المقام

نختصر الأعداد مع بعضها ليصبح المقدار هو

$$\frac{5a^2\cdot 2}{c\cdot b^3}=\frac{10a^2}{cb^3}$$

مثال 13 أوجد ناتج $\frac{n^5}{n-6}\cdot\frac{n^2-6n}{n^8}$

الحل نأخذ العامل المشترك ونختصر

$$\frac{n^5}{n-6}\cdot\frac{n(n-6)}{n^8}=\frac{n^6}{n^8}=\frac{1}{n^2}$$

مثال 14 أوجد ناتج $\frac{5x}{2y}\div\frac{10x}{4y}$

الحل نحول علامة القسمة إلى ضرب

$$\frac{5x}{2y}\times\frac{4y}{10x}=\frac{2}{2}=1$$



عماد الجزيري
مؤلف كتاب المعاصر

❼ نظرية الباقي

➢ إذا قسمت كثيرة الحدود $f(x)$ على $x-r$ فإن باقي القسمة هو $f(r)$

مثال 15 إذا كانت $f(x)=x^3+x^2-3$ فإن باقي قسمة $f(x)$ على $x-1$ هو

a) 0 b) -1 c) 4 d) 1

الحل لإيجاد باقي القسمة نعين $f(1)=1^3+1^2-3$

$f(1)=-1$

ملحوظة

يكون $x-r$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $f(x)$ إذا كان $f(r)=0$

مثال 16 أحد عوامل كثيرة الحدود $f(x)=x^3-7x+6$

a) $x-1$ b) $x+1$ c) $x-2$ d) 1

الحل نستخدم طريقة التجربة

نعوض عن 2 أو -1 أو $x=1$ ونراقب أي منها سيعطي ناتج صفر

$f(1)=1^3-7(1)+6=0$

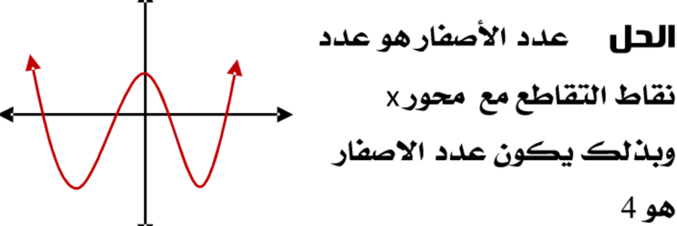
هذا يعني ان العامل هو $x-1$

❽ الأصفار الحقيقة للدالة

عدد الأصفار الحقيقة للدالة هو عدد نقاط تقاطع المنحنى مع محور x

مثال 17 كم عدد الأصفار الحقيقة للدالة المرسومة

a) 2 b) 3 c) 4 d) 1



الحل عدد الأصفار هو عدد نقاط التقاطع مع محور x وبذلك يكون عدد الاصفار هو 4

❾ عدد الجذور المركبة

هو نفس درجة كثيرة الحدود

مثلاً عدد الجذور المركبة لكثيرة الحدود

$3x^4-5x^2+7$

الحل عدد الجذور المركبة هو 4

❿ تركيب الدوال

إذا كان $f(x), g(x)$ دالتين فإن تحصيل دالتين هو

$(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)$

ونحصل عليها عن طريق التعويض بالدالة $g(x)$ داخل الدالة $f(x)$

مثال 18 إذا كانت $f(x)=5x^2\,,\; g(x)=2x+1$

أوجد $(f\circ g)(x)$

الحل نعوض عن الدالة $g(x)$ داخل الدالة $f(x)$

$f\big(g(x)\big)=5(2x+1)^2=$

$5(4x^2+4x+1)=20x^2+20x+5$

مثال 19 إذا كانت $f(x)=4x^2\,,\; g(x)=3x$

أوجد $(f\circ g)(2)$

الحل نوجد $g(2)$

$g(2)=3(2)=6$

ثم نوجد $f(6)$

$f(6)=4(6^2)=4(36)=144$

مثال 20 $f(x)=\{(7,2),(3,-1),(6,-8)\}$

$g(x)=\{(-1,7),(-5,6),(3,4)\}$

اوجد $f\circ g(x)$

الحل نبدأ من عنصر x الموجود داخل $g(x)$ ثم نذهب للدالة $f(x)$

$g(-1)=7 \;\rightarrow\; f(7)=2$

$g(-5)=6 \;\rightarrow\; f(6)=-8$

$g(3)=4 \;\rightarrow\; f(4)=$ غير معروف

وبذلك يكون ناتج التحصيل هو

$(-1,2),(-5,-8)$

x	f
-1	2
-5	-8
3	لايوجد

⑪ المعادلات والمتباينات الجذرية

لحل المعادلة أو المتباينة الجذرية نضع الجذر في طرف واحده ثم نربع الطرفين لنتخلص من الجذر

مثال 21 حل المعادلة $\sqrt{x+2}-7=0$

الحل $\sqrt{x+2}=7$

بتربيع الطرفين $x+2=49$

$x=47$

مثال 22 حل المعادلة $\sqrt{3x-2}>4$

الحل بتربيع الطرفين $3x-2>16$

$3x>18$

$x>6$

⑫ مجال الدالة كثيرة الحدود

المجال هو R

مثال ㉓ أوجد مجال الدالة $f(x)=x^2+5x-2$

الحل المجال هو R

⑬ مجال الدالة تحت الجذر التربيعي

نضع ماتحت الجذر ≥ 0

مثال ㉔ أوجد مجال $f(x)=\sqrt{2x+8}$

الحل $2x+8\geq 0$

$2x\geq -8$

$x\geq -4$

ملحوظة

مجال الجذر التكعيبي هو R

⑬ مجال الدالة الكسرية $\frac{\text{كثيرة حدود}}{\text{كثيرة حدود}}$

$R-\{\text{أصفار المقام}\}$

مثال ㉕ أوجد مجال الدالة $f(x)=\frac{3x-2}{2x-6}$

الحل أصفار المقام $2x-6=0$

أي أن $x=3$

المجال هو $R-\{3\}$

⑭ مجال الدالة $\frac{\text{كثيرة حدود}}{\sqrt{\cdots\cdots}}$

نضع ماتحت الجذر >0

مثال 26 أوجد مجال الدالة $f(x)=\frac{3x-5}{\sqrt{x-4}}$

الحل $x-4>0$

$x>4$

⑮ معكوس الدالة

I. استبدال $f(x)$ بـ y

II. استبدال y بـ x و العكس

III. نضع y طرفاً لوحده

مثال 27 إذا كان $f(x)=2x+3$ فإن $f^{-1}(x)$

الحل $y=2x+3$ استبدل $f(x)$ بـ y

$x=2y+3$ استبدل x بـ y

$2y=x-3$ جعل y طرفاً لوحده

$$y=\frac{x-3}{2}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x-3}{2}$$

⑯ متوسط التغير في الدالة

متوسط معدل التغير للدالة $f(x)$ في الفترة $[a,b]$ هو

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

مثال 28 أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x)=x^2+5$ في $[1,2]$

الحل

$f(2)=4+5=9$

$f(1)=1+5=6$

المتوسط هو $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{9-6}{2-1}=3$

مثال 29 أوجد متوسط تغير الدالة للدالة $f(x)=\sqrt{2x+3}$ في $[-1,3]$

الحل

$=f(-1)=\sqrt{2(-1)+3}=\sqrt{1}=1$

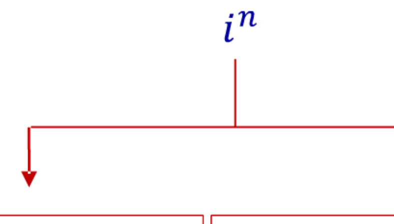
$f(3)=\sqrt{2(3)+3}=\sqrt{9}=3$

المتوسط هو $\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$

⑰ العدد التخيلي

- $\sqrt{-1} = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = -i$
- $i^4 = 1$

i^n



الناتج هو 1	الناتج هو -1
إذا كانت n زوجي يقبل القسمة على 4	إذا كانت n زوجي لايقبل القسمة على 4
مثلاً $i^{24} = 1$	مثلاً $i^{18} = -1$

i^n

الناتج هو i	الناتج هو $-i$
إذا كانت n فردي فنطرح منه 1 ويكون العدد المتبقي يقبل القسمة على 4	إذا كانت n فردي نطرح منه 1 ويكون العدد المتبقي لا يقبل القسمة على 4
مثلاً $i^{21} = 1$	مثلاً $i^{23} = -1$

مثال 30 حل المعادلة $x^2 + 4 = 0$

الحل

$x^2 = -4$ بأخذ $\sqrt{}$ للطرفين

$x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2\sqrt{-1} = \pm 2i$

مثال 31 ماقيمة $-3i \cdot 5i$

الحل $-15i^2 = -15(-1) = 15$

⑱ العدد المركب $a + ib$

يسمى a الجزء الحقيقي b الجزء التخيلي

- عند تساوي عددين مركبين فإن الأجزاء الحقيقية متساوية والأجزاء التخيلية متساوية

مثال 32 إذا كان $3a + 5bi = 6 - 25i$

أوجد قيمة a , b

الحل الجزء الحقيقي = الجزء الحقيقي

$3a = 6 \rightarrow\rightarrow a = 2$

الجزء التخيلي = الجزء التخيلي

$5b = -25 \rightarrow\rightarrow \quad b = -5$

- عند جمع وطرح أعداد مركبة نجمع الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي

مثال 33 أوجد ناتج $(3 + 5i) - (7 - 2i)$

الحل $3 + 5i - 7 + 2i$

$= -4 + 7i$

- عند ضرب أعداد مركبة نستخدم طريقة التوزيع

مثال 34 ماقيمة $(2 + 5i)(1 + 2i)$

الحل

$(2 + 5i)(1 + 2i)$

$2 + 4i + 5i + 10i^2$

$2 - 10 + 9i = -8 + 9i$

⑲ المعادلة التربعية و المميز

المميز $b^2 - 4ac$ يستخدم في تحديد نوع جذري المعادلة التربعية كمايلي

$b^2 - 4ac$
- لو الناتج عدد موجب مربع تكون الجذور حقيقة نسبية
- لو الناتج موجب غير مربع تكون الجذور حقيقة غير نسبية
- لو الناتج صفر تكون الجذور حقيقة متساوية
- لو الناتج سالب تكون الجذور تخيلية مركبة

⑳ دوال التغير

❶ التغير الطردي

إذا كانت y تتغير طردياً مع x فإن $y = kx$

حيث k عدد ثابت

مثلاً $\frac{y}{x} = 2$ أو $y = 2x$

كلها علاقات طردية بين x و y

❷ التغير العكسي

إذا كانت y تتغير عكسياً مع x فإن $y = \frac{k}{x}$

حيث k عدد ثابت

مثلاً $y = \frac{2}{x}$ أو $xy = 2$

❸ التغير المشترك

إذا كانت y تتغير مشترك مع x و z فإن $y = kxz$

حيث k عدد ثابت

❹ التغير المركب

إذا كانت y تتغير طردي مع x وعكسي مع z فإن

$$y = \frac{kx}{z}$$

حيث k عدد ثابت

مثال 35 أي العلاقات الأتية فيها تتغير y طردي مع x وعكسي مع z

$a)\ y = \frac{5x}{z}$ $\quad b)y = 5xz$ $\quad c)yx = 5$ $\quad d)y = \frac{z}{x}$

الحل

العلاقة الصحيحة هي $y = \frac{5x}{z}$

مثال 36 إذا كانت x تتغير عكسياً مع y وكانت x =20 عندما y =4 أوجد x عندما y=5

الحل

$x = 20 \longleftarrow y = 4$

$x = ؟ \longleftarrow y = 5$

حيث أن العلاقة عكسية نتحرك مع السهم

$$x = \frac{20 \times 4}{5} = 16$$

㉑ خطوط التقارب للدالة النسبية $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$

- خط التقارب الرأسي عندما يكون المقام = صفر
- خط تقارب أفقي حسب درجة البسط والمقام

❶ إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقاملا يوجد خط تقارب افقي

❷ إذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام يوجد خط تقارب أفقي هو $y = 0$

❸ إذا كانت درجة البسط = درجة المقام يوجد خط تقارب أفقي هو $y = \frac{\text{معامل أكبر أس في البسط}}{\text{معامل أكبر أس في المقام}}$

مثال 37 خط التقارب الرأسي للدالة $f(x) = \frac{5x}{x^2-4}$ هو

$a)\ x = \pm 2$ $\quad b)y = \frac{5}{2}$ $\quad c)y = 0$ $\quad d)x = 2$

الحل

خط التقارب الرأسي عندما يكون المقام = صفر

أي أن $x^2 - 4 = 0 \rightarrow\rightarrow x = \pm 2$

مثال 38 خط التقارب الأفقي للدالة $f(x) = \frac{5x}{2x-4}$ هو

$a)\ x = \pm 2$ $\quad b)y = \frac{5}{2}$ $\quad c)\ y = 0$ $\quad d)\ x = 2$

الحل

حيث أن درجة البسط = درجة المقام

فإن خط التقارب الفقي هو

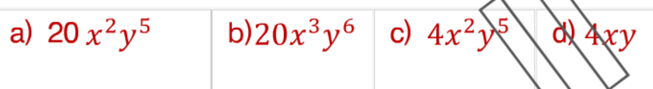
$$y = \frac{\text{معامل أكبر أس في البسط}}{\text{معامل أكبر أس في المقام}}$$

$$y = \frac{5}{2}$$



تجميعات 1437

❶ المضاعف المشترك الأصغر L .C .M. لكثيرتي الحدود $4X^2Y^6, 20X^3Y^5$



a) $20\,x^2y^5$	b) $20x^3y^6$	c) $4x^2y^5$	d) $4xy$

❷ أوجد مجال الدالة $f(x) = \frac{x-3}{2x-5}$

a) $R-\{5\}$	b) $R-\left\{\frac{5}{2}\right\}$	c) $R-\{2\}$	d) R

❸ إذا كان $f(x) = 4x^2 - 8$ فما قيمة $f(x-1)$

a) $4x^2 - 8x - 4$	b) $4x^2 - 8$
c) $x^2 - 1$	d) $x - 7$

تجميعات 1436

❹ أوجد متوسط معدل التغير للدالة

$f(x) = x^2 - 3x - 4$

في الفترة $[3,5]$

a) 3	b) 4	c) 5	d) 6

❺ أي ممايلي عامل من عوامل كثيرة الحدود

$x^3 - x^2 + 2x + 4$

a) $x-1$	b) $x+1$	c) $x-2$	d) $x+2$

❻ ما مجال الدالة $f(x) = \sqrt{2x-6}$

a) $R-\{5\}$	b) R	c) $x \geq 6$	d) $x \geq 3$

❼ أوجد متوسط معدل التغير للدالة في الفترة $[-5,-3]$

$f(x) = x^4 - 6x^2$

a) -224	b) 115	c) -140	d) 625

❽ ما أبسط صورة للعبارة النسبية

$$\frac{x^2-4x-21}{x^2-25} \div \frac{x^2-7x}{x-5}$$

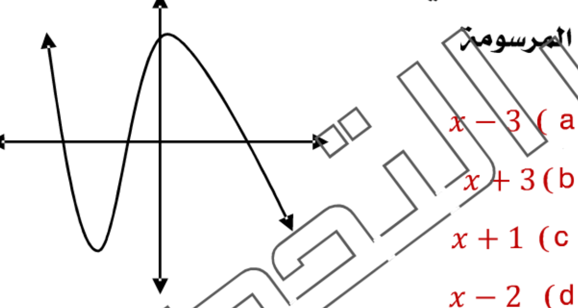
a) $\frac{x+3}{x(x+5)}$	b) $\frac{x}{x+5}$
c) $\frac{1}{x}$	d) $\frac{x(x+5)}{x+3}$

❾ إذا كانت $g(x) = x-3, f(x) = x^2+1$ ماهى النقطة التي تجعل $(f\circ g)(x) = (g\circ f)(x)$

a) $x = 1$	b) $x = -1$
c) $x = 2$	d) $x = -2$

تجميعات 1435

❿ أي ممايلي ليس عامل من عوامل كثيرة الحدود المرسومة



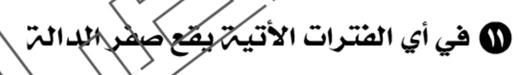
a) $x-3$

b) $x+3$

c) $x+1$

d) $x-2$

⓫ في أي الفترات الأتية يقع صفر الدالة



$f(x) = \sqrt{x^2-6} - 6$

a) $[6,7]$	b) $[7,8]$	c) $[8,9]$	d) $[9,10]$

⓬ أي ممايلي لاينتمي إلى مجال الدالة

$f(x) = \sqrt{4-2x}$

a) 1	b) 3	c) 0	d) 2

مفاتيح الحل

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
b	a	d	c	a	a	d	b	c	a	b	b

تجميعات 1437

❶ إذا كانت x تتغير عكسيا مع y وكانت x=-12 عندما y= 2 فما قيمة y عندما x= 6

a) -1	b) -4	c) 1	d) 2

❷ العلاقة بين $x\,,y$ في المعادلة $\frac{y}{x}=2$ هي

a) مشترك	b) مركب	c) طردية	d) عكسية

تجميعات 1436

❸ المعادلة $x^2-6x=-10$ لها حلان هما

a) ± 3	b) ± 2	c) $\pm i$	d) $3\pm i$

❹ ما قيمة $i^{24}+i^{25}+i^{26}+i^{27}$

a) 1	b) -1	c) 0	d) i

❺ ماقيمة المميز للمقدار

$$x^2-5x+7=0$$

a) 3	b) -3	c) 2	d) 0

❻ أوجد ناتج $(4+i)(4-i)$

a) 17	b) 15	c) $16-i$	d) $16+i$

❼ أي ممايلي ليس حلاً لكثيرة الحدود

$x^3-37x-84=0$

a) 6	b) -4	c) -3	d) 7

❽ خط التقارب الأفقي للدالة $y=\frac{4x}{x^2-16}$

$a)\ x=\pm 2$ $b)\ y=\frac{5}{2}$ $c)\ y=0$ $d)\ x=2$

❾ توجد للدالة $y=2x^2-8x$ قيمة صغرى في $[3,5]$ هي

a) -6	b) -8	c) 10	d) 2

ارشاد للحل

توجد للدالة قيمة عظمى أو صغرى في
عند بداية ونهاية الفترة $[a\,,b]$ أو عند
النقاط الحرجة إذا كانت تنتمي إلى الفترة



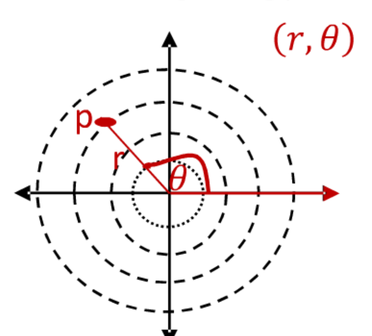
مفاتيح الحل

8	7	6	5	4	3	2	1
a	a	a	b	c	d	c	b

١٠ المستوى القطبي

أي نقطة p في المستوى القطبى يكون احداثيها

(r,θ)



حيث r تعبر عن المسافة، θ تعبر عن الزاوية المحصورة مع المحور القطبي

هام جداً

- يمكن الحصول على عدة نقاط لها نفس التمثيل البياني للنقطة (r,θ) عن طريق إضافة او طرح 360 مع الزاوية θ ← $(r,\theta\pm 360)$
- يمكن الحصول على عدة نقاط لها نفس التمثيل البياني للنقطة (r,θ) عن طريق تغير اشارة r و إضافة أو طرح 180 مع الزاوية θ
  $(-r,\theta\pm 180)$
- المعادلة $r=$ عدد هى معادلة دائرة نصف قطرها هو العدد
- المعادلة $\theta=$ زاوية هى معادلة خط مستقيم زاوية ميله هو قيمة الزاوية

مثال ① أوجد نقطة في المستوى القطبي لها نفس التمثيل البياني للنقطة

$(3,60)$

$a)\ (4,420)$ $\qquad b)(3,300)$

$c)(-3,240)$ $\qquad d)(3,-120)$

الحل

الحل الصحيح هو c لأنه تم تغير اشارة r وإضافة 180 للزاوية

مثال ② أي المعادلات الأتية هو معادلة خط مستقيم زاوية ميله 30

$a)\ r=30 \qquad b)r=3 \qquad c)\theta=30 \qquad d)\theta=120$

الحل المعادلة الصحيحة هى c

مثال ③ أي المعادلات الأتية هو معادلة دائرة نصف قطرها 3

$a)\ r=9 \qquad b)r=3 \qquad c)\theta=3 \qquad d)\theta=30$

الحل المعادلة الصحيحة هى b

❶ المسافة بين النقطتين في المستوى القطبي

إذا كان $p_1(r_1,\theta_1)$, $p_2(r_2,\theta_2)$ نقطتين في المستوى القطبي فإن المسافة بينهما هى

$$p_1p_2=\sqrt{{r_1}^2+{r_2}^2-2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)}$$

مثال ④ أوجد المسافة بين النقطتين

$(2,30°),(1,120°)$

الحل المسافة هى

$$\sqrt{2^2+1^2-2\cdot2\cdot1\cos(120-30)}=\sqrt{4+1-4(0)}=\sqrt{5}$$

❷ التحويل من القطبي إلى الديكارتي

$$x=r\cos\theta \quad , \quad y=r\sin\theta$$

مثال ⑤ أوجد الاحداثي الديكارتي للنقطة $(4,60°)$

الحل

$$x=4\cos 60=4\cdot\frac{1}{2}=2$$

$$y=4\sin 60=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

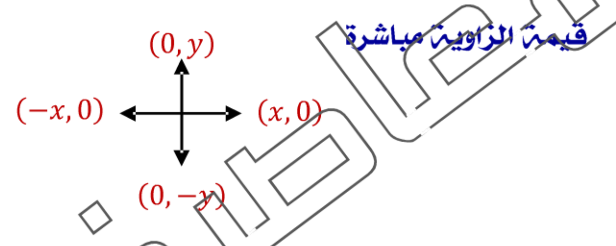
أي أن النقطة هى $(2,2\sqrt{3})$

③ التحويل من الديكارتي إلى القطبي

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

هام

- نضيف للزاوية 180 إذا كانت النقطة في الربع الثاني أو الثالث
- نضيف للزاوية 360 إذا كانت النقطة تقع في الربع الرابع
- إذا كانت النقطة تقع على المحاور فيجب تعين قيمة الزاوية مباشرة



مثال ⑤ النقطة $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ في الصورة القطبية هي

a) (1,45) b) (2,30) c) (2,45) d) $(\sqrt{2}, 60)$

الحل

$$r = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{2+2} = 2$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \tan^{-1} 1 = 45$$

النقطة هي (2,45)

مثال ⑥ النقطة $(-3, 0)$ في الصورة القطبية هي

a) $(3, \pi)$ b) $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$ c) (1,45) d) $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$

الحل

$$r = \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$$

وحيث أن النقطة تقع على محور x السالب فإن قيمة الزاوية هو 180

تصبح النقطة هي (3,180)

مثال ⑦ النقطة $(\sqrt{3}, -1)$ في الصورة القطبية هي

الحل

$$r = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{-1} + 360 = -60 + 360 = 300$$

النقطة هي (2,300)



④ القيمة المطلقة لعدد المركب

$$z = a + ib$$

القيمة المطلقة هي $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

مثال ⑧ أوجد القيمة المطلقة للعدد $4 + 3i$

الحل $|z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

⑤ الصورة القطبية للعدد المركب

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

حيث r مقياس العدد المركب , θ سعة العدد المركب

مثال ⑨ العدد $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ في الصورة القطبية هو.....

الحل

$$r = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \tan^{-1} 1 = 45$$

الصورة القطبية هي

$$z = 2(\cos 45 + i\sin 45)$$

مثال ⑩ العدد $4(\cos 60 + i\sin 60)$ في الصورة الديكارتية

الحل فقط علينا التعويض عن قيمة

$cos60 = \frac{1}{2}$ $sin60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$4(\cos 60 + i\sin 60) = 4\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + i2\sqrt{3}$$

مثال ⑪ سعة العدد المركب $z = 7\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$

a) 0	b) 30	c) 60	d) 7

الحل السعة هي $60 = \frac{\pi}{3}$



❻ تحويل المعادلة الديكارتية إلي الصورة القطبية

نستخدم التحويلات الأتية

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

مثال ⑫ ما الصورة القطبية للمعادلة

$$x^2 - y^2 = 3$$

a) $r^2 = 3\cos 2\theta$	b) $r^2 = \frac{3}{\sec 2\theta}$
c) $r^2 = 3\sec 2\theta$	d) $r^2 = \frac{3}{\csc 2\theta}$

الحل نعوض عن x , y في المعادلة

$$(r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2 = 3$$

$$r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = 3$$

بأخذ r^2 عامل مشترك $r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 3$

$$r^2 \cos 2\theta = 3$$

$$r^2 = \frac{3}{\cos 2\theta} \to\to r^2 = 3\sec 2\theta$$

❼ تحويل المعادلة القطبية إلي الصورة الديكارتية

✓ إذا كانت المعادلة في صورة $r =$ عدد نربع الطرفين ثم نعوض عن r^2 بـ $x^2 + y^2$

مثال ⑬

ماصورة المعادلة $r = 3$ في الصورة الديكارتية

a) $x + y = 3$	b) $x^2 + y^2 = 9$
c) $x^2 = 3y^2$	d) $x^2 + y^2 = 3\sin\theta$

الحل نربع المعادلة لتصبح $r^2 = 9$ ثم نعوض عن r^2

لتصبح المعادلة هي b) $x^2 + y^2 = 9$

✓ إذا كانت المعادلة في صورة $\theta =$ عدد ندخل $\tan$ على الطرفين ثم نعوض عن $\tan\theta$ بـ $\frac{y}{x}$

مثال ⑬

ماصورة المعادلة $\theta = \frac{\pi}{3}$ في الصورة الديكارتية

a) $x + y = 3$	b) $y = \sqrt{3}x$
c) $x = \sqrt{2}y$	d) $x^2 + y^2 = 3\sin\theta$

الحل إدخل $\tan$ على طرفي المعادلة لتصبح $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{3}$ ثم نعوض عن $\tan$ بـ $\frac{y}{x}$

لتصبح المعادلة هي $\frac{y}{x} = \sqrt{3}$

أي أن المعادلة هي $y = \sqrt{3}x$

✓ إذا كانت المعادلة في صورة $r = \theta$ نضرب الطرفين في r ثم نعوض عن r^2 بـ $x^2 + y^2$

مثال ⑭ ماصورة المعادلة $r = 4\sin\theta$ في الصورة الديكارتية

a) $x + y = 3x$	b) $x^2 + y^2 = 4x$
c) $x^2 = 4y^2$	d) $x^2 + y^2 = 4y$

الحل نضرب الطرفين في r لتصبح المعادلة

$$r^2 = 4r\sin\theta$$

نعوض عن r^2 بـ $x^2 + y^2$ ونعوض عن $r\sin\theta$ بـ y لتصبح المعادلة هي

d) $x^2 + y^2 = 4y$

❽ نظرية ديموافر

إذا كان العدد $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

فإنه يمكن إيجاد z^n من القانون

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

مثال ⑮ إذا كان $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

أوجد z^3

الحل

$$z^3 = 4^3\left(\cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3}\right)$$

$$z^3 = 64(\cos\pi + \sin\pi)$$

مثال ⑯ أوجد قيمة $(1+i)^4$

الحل لابد من تحويل العدد إلى الصورة القطبية

$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ و $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{1} = 45$

$$z = \sqrt{2}(\cos 45 + i\sin 45)$$

بعد ذلك نوجد z^4

$$z^4 = \sqrt{2}^4(\cos 4\cdot 45 + i\sin 4\cdot 45)$$

$$= 4(\cos 180 + i\sin 180)$$

$$= 4(-1+0) = -4$$

❾ ضرب وقسمة الاعداد المركبة في الصورة القطبية

عند الضرب نجمع السعات ونضرب المقياس

عند القسمة نطرح السعات ونقسم المقياس

مثال ⑰ إذا كان $z_1 = 8(\cos 120 + i\sin 120)$

$z_2 = 2(\cos 30 + i\sin 30)$

أوجد $\frac{z_1}{z_2}$ و $Z_1 \cdot Z_2$

الحل

$$z_1 \cdot z_2 = 8\cdot 2(\cos(120+30) + i\sin(120+30))$$

$$= 16(\cos 150 + i\sin 150)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8}{2}(\cos(120-30) + i\sin(120-30))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 4(\cos 90 + i\sin 90)$$

تجميعات السنوات السابقة محلولة فيديو

تجميعات 1437

❶ إذا كان $x = 2$ في الصورة القطبية هي

a) $r = 2\sec\theta$ b) $r = 2\tan\theta$

c) $r = 2\csc\theta$ d) $r = 2\cot\theta$

❷ أوجد $(1+\sqrt{3}i)^6$

a) 64	b) −64	c) 32	d) 1

❸ مقياس العدد المركب $(i-1)^8$ هو

a) 4	b) 6	c) 8	d) 16

❹ أوجد الصورة الإحداثية للنقطة $(-2,60)$

a) $(1,\sqrt{3})$	b) $(-1,3)$	c) $(-1,\sqrt{3})$	d) $(\sqrt{3},1)$

❺ ما الصورة القطبية للمعادلة

$$x^2 + (y-2)^2 = 4$$

a) $r = \sin\theta$	b) $r = 2\sin\theta$
c) $r = 4\sin\theta$	d) $r = 8\sin\theta$

تجميعات 1436

❻ ما الصورة الديكارتية للمعادلة $\theta = \frac{\pi}{6}$

a) $x + y = 3$	b) $y = \sqrt{3}x$
c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$	d) $x^2 + y^2 = 3\sin\theta$

❼ الصورة القطبية للمعادلة $x^2 + y^2 = 9$

a) $r = 9$	b) $r = \pm 3$
c) $r = 3\sin\theta$	d) $r = 3\cos$

٠٥٥٣٤٦٧٩٤٠

مفاتيح الحل

7	6	5	4	3	2	1
b	c	c	c	d	b	a

١١ تحليل الدوال بيانياً

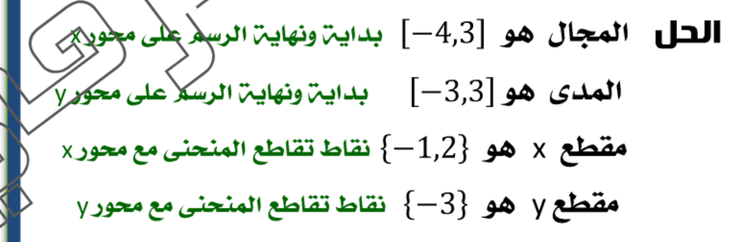
❶ المجال والمدى

المجال بياني هو جميع قيم x المقابلة للرسم

المدى بياني هو جميع قيم y المقابلة للرسم

- **المقطع x** نقاط تقاطع المنحنى مع محور x
- **المقطع y** نقاط تقاطع المنحنى مع محور y

مثال ① أوجد المجال – المدى - مقطع X - مقطعY



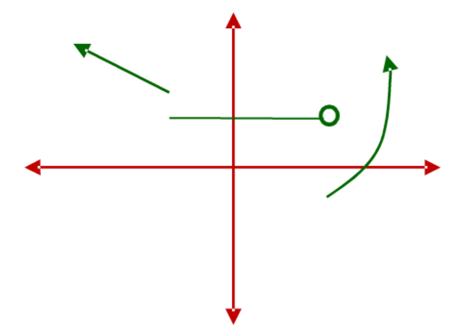
الحل المجال هو $[-4,3]$ بداية ونهاية الرسم على محور x

المدى هو $[-3,3]$ بداية ونهاية الرسم على محور y

مقطع x هو $\{-1,2\}$ نقاط تقاطع المنحنى مع محور x

مقطع y هو $\{-3\}$ نقاط تقاطع المنحنى مع محور y

مثال ② أوجد المجال – المدى

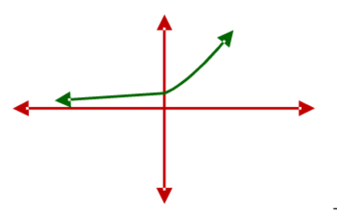


الحل المجال هو $]-\infty,-2] \cup [-2,3[\cup [3,\infty[$

$= R$

المدى هو $[-1,\infty[$

مثال ③ أوجد المجال – المدى



الحل المجال R

المدى $]0,\infty[= R^+$



❷ التزايد والتناقص

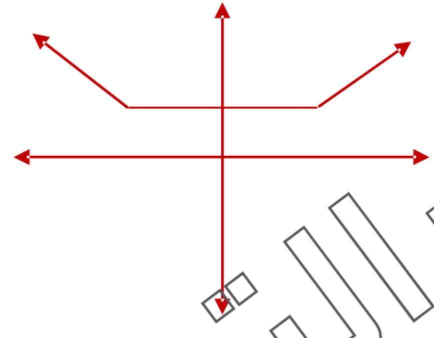
نصع مماس وهمي لكل فرع في الدالة ينتج أحد المماسات الأتية



تزايدية تناقصية ثابتة

وتحدد فترة كل واحدة من بدايتها إلى نهايتها على محور X وتكون جميع الفترات مفتوحة

مثال ③ أوجد فترات التزايد والتناقص للدالة

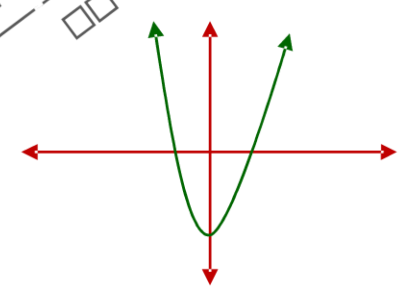


الحل الدالة تناقصية في $]-\infty,3[$

الدالة ثابتة في $]-3,3[$

الدالة تزايدية في $]3,\infty[$

مثال ④ أوجد فترات التزيد والتناقص للدالة



الحل الدالة تناقصية في $]-\infty,0[$

الدالة تزايدية في $]0,\infty[$

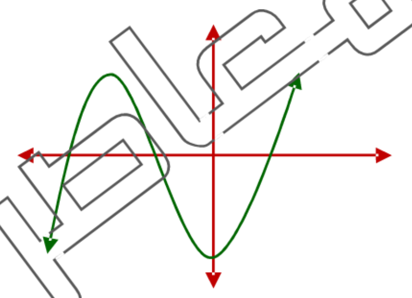
٣ القيمة العظمى والصغرى

القيمة العظمي المحلية هي أكبر قيمة للدالة في فترة من المجال ⟵ من على محور Y

القيمة العظمي المطلقة هى أكبر قيمة للدالة في مجالها كله ⟵ من على محور Y

ويحدث العكس في الصغرى المحلية و المطلقة

مثال ⑤ ماهى القيمة العظمى و الصغرى المحلية

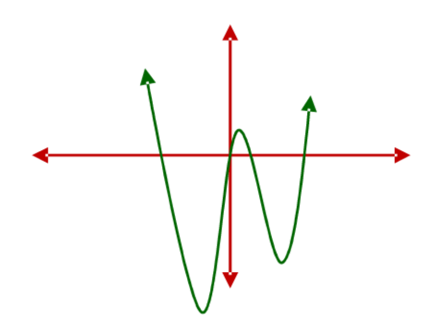


الحل عظمى محلية عند $y = 4$

صغرى محلية عندما $y = -2$

مثال ⑥ الدالة لها قيمة عظمى مطلقة هى ....

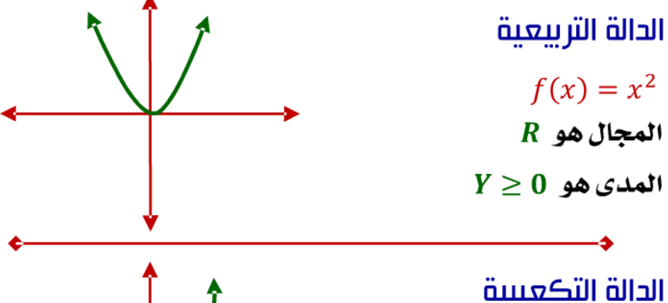
الدالة لها قيمة صغرى مطلقة هى ....



الحل القيمة العظمى المطلقة لايوجد لأن المنحنى ممتد إلى ∞ ناحية أعلى ولكن توجد قيمة عظمى محلية فقط عند $y = 4$

قيمة صغرى مطلقة عند $y = -5$

٤ الدوال الرئيسية الأم وطريقة الإزاحات



الدالة التربيعية

$f(x) = x^2$

المجال هو R

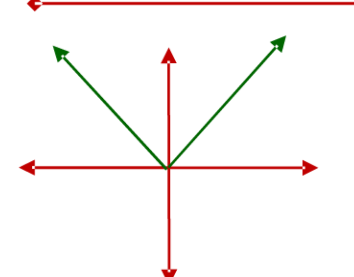
المدى هو $Y \geq 0$

الدالة التكعيبية

$f(x) = x^3$

المجال هو R

المدى هو R

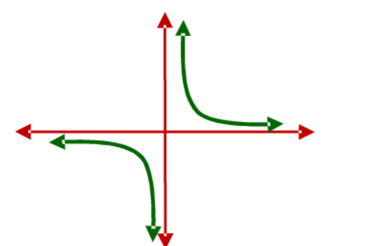


دالة القيمة المطلقة

$f(x) = |x|$

المجال هو R

المدى هو $[0, \infty]$



دالة المقلوب

$f(x) = \frac{1}{x}$

المجال هو $R - \{0\}$

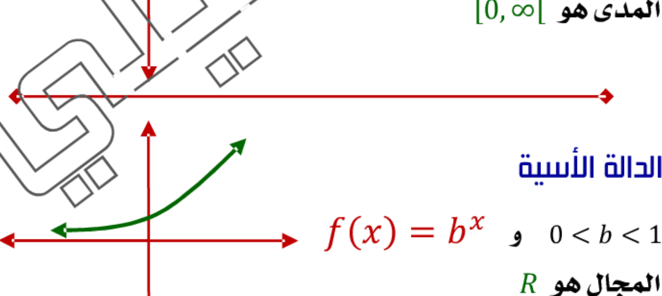
المدى هو $R - \{0\}$

دالة الجذر التربيعي

$f(x) = \sqrt{x}$

المجال هو $[0, \infty[$

المدى هو $[0, \infty[$



الدالة الأسية

$f(x) = b^x$ و $0 < b < 1$

المجال هو R

المدى هو $]0, \infty[$ أو R^+

الدالة اللوغارتمية

$f(x) = \log_b x$ و $0 < b < 1$

المجال هو $]0, \infty[$ أو R^+

المدى هو R

عماد الجزيري

مؤلف كتاب المعاصر

مثال ⑦ الدالة الرئيسية الأم للدالة

$f(x) = (x-1)^2 + 5$ هي ....

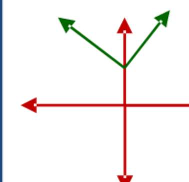
الحل الدالة الأم هي $f(x) = x^2$

مثال ⑧ الدالة الرئيسية الأم للدالة

$f(x) = \frac{1}{x-1} + 5$ هي ....

الحل الدالة الأم هي $f(x) = \frac{1}{x}$

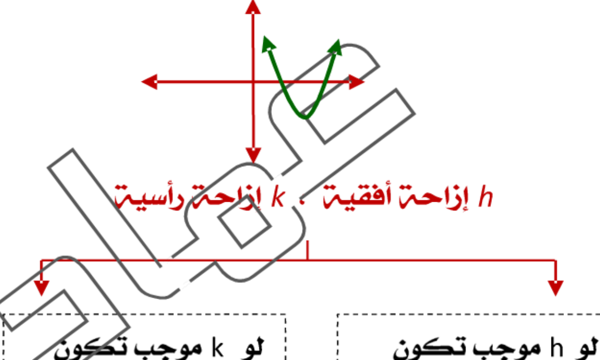
مثال ⑨ الدالة الرئيسية الأم للدالة



الحل الدالة الأم هي $f(x) = |x|$

٥ عائلة الدالة التربيعية

عائلة الدالة التربيعية هي $f(x) = a(x-h)^2 + k$



h إزاحة أفقية ، k إزاحة رأسية

لو k موجب تكون الإزاحة ناحية أعلى ولو سالب تكون الإزاحة ناحية أسفل	لو h موجب تكون الإزاحة ناحية اليمين ولو سالب تكون الإزاحة ناحية اليسار

ملاحظة هامة لو كانت a سالبة أي أن المنحنى حدث له إنعكاس حول محور x

مثال ⑩ إذا كان منحنى الدالة $g(x)$ ينتج من منحنى الدالة $f(x)$ بإزاحة مقدارها وحدتين لليسار و 3 وحدات لأعلى مع إنعكاس حول محور x فما هي $g(x)$

الحل وحدتين لليسار أي أن $h = -2$ ، 3 وحدات لأعلى أي أن $k = 3$ وإنعكاس حول محور x أي أن a سالبة

نعوض في العائلة $g(x) = a(x-h)^2 + k$

لتصبح الدالة هي $g(x) = -(x+2)^2 + 3$





مثال ⑪ الدالة المرسومة أمامك هي

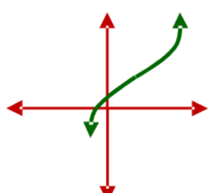
$a)|x+2|$ $\quad b)\ x^2 - 2$

$c)(x-1)^2 - 2$ $\quad d)\sqrt{x-2}$

الحل الدالة المرسومة هي دالة تربيعية بإزاحة مقدارها 2 ناحية اسفل وبذلك يكون الحل الصحيح هو b

٦ عائلة الدالة التكعيبية

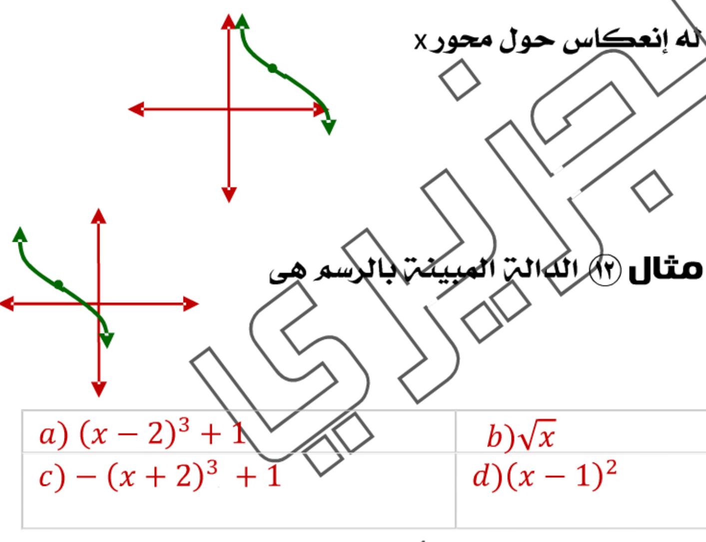
عائلة الدالة التكعيبية هي $f(x) = a(x-h)^3 + k$



h إزاحة أفقية ، k إزاحة رأسية

لو k موجب تكون الإزاحة ناحية أعلى ولو سالب تكون الإزاحة ناحية أسفل	لو h موجب تكون الإزاحة ناحية اليمين ولو سالب تكون الإزاحة ناحية اليسار

ملاحظة هامة لو كانت a سالبة أي أن المنحنى حدث له إنعكاس حول محور x



مثال ⑫ الدالة المبينة بالرسم هي

$a)\ (x-2)^3 + 1$	$b)\sqrt{x}$
$c) -(x+2)^3 + 1$	$d)(x-1)^2$

الحل يتضح من الرسم أن $h = -2,\ k = 1$ وقيمة a سالبة بسبب حدوث إنعكاس حول محور x

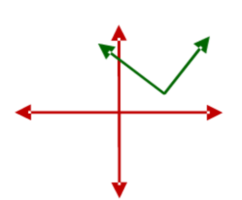
أي أن الإجابة الصحيحة هي c)

عماد الجزيري

مؤلف كتاب المعاصر

⑦ عائلة القيمة المطلقة

هى $f(x) = a|x-h| + k$



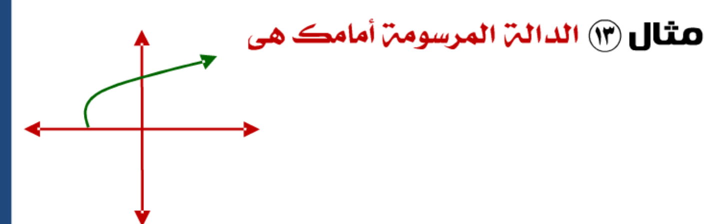
ونطبق عليها نفس الإزاحات والخصائص السابقة

⑧ عائلة دالة الجذر التربيعي

هى $f(x) = a\sqrt{x-h} + k$

ونطبق عليها نفس الإزاحات والخصائص السابقة

مثال ⑬ الدالة المرسومة أمامك هى



$a)|x+2|$ $\qquad$ $b)\sqrt{x+2}$

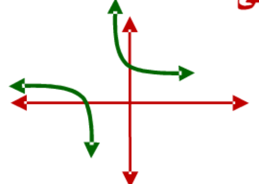
$c)(x-1)^3-2$ $\qquad$ $d)\sqrt{x-2}$

الحل الدالة المرسومة هى دالة الجذر التربيعي بإزاحة مقدارها 2 ناحية اليسار وبذلك يكون الحل الصحيح هو b

⑧ عائلة دالة المقلوب

$$F(x)= \frac{a}{x-h} + k$$

مثال ⑭ الدالة المرسومة أمامك هى



$a)|x+2|$ $\qquad$ $b)\ \frac{1}{x}+2$

$c)(x-1)^2-2$ $\qquad$ $d)\frac{1}{x+1}+1$

الحل الدالة المرسومة هى دالة المقلوب بإزاحة مقدارها 1 ناحية اعلى وازاحة مقدارها 1 لليسار وبذلك يكون الحل الصحيح هو d

تجميعات السنوات السابقة محلولة فيديو

تجميعات 1436

❶ إذا كان منحنى $g(x)$ ينتج من منحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ بإنسحاب وحدتين لليسار ثم إنعكاس حول محور x ثم انسحاب ثلاث وحدات إلى الأسفل فأي ممايلي يمثل الدالة $g(x)$

a) $g(x) = \sqrt{-x+2} - 3$

b) $g(x) = -\sqrt{x+2} - 3$

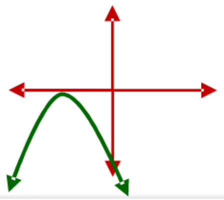
c) $g(x) = -\sqrt{x-2} + 3$

d) $g(x) = \sqrt{x+2} - 3$

❷ مامدى الدالة $f(x) = x^2 + 1$ إذا كان مجالها هو $-2 < x < 3$

a) $1 < f(x) < 9$	b) $5 < f(x) < 9$
c) $5 \le f(x) < 10$	d) $2 < f(x) < 10$

❸ الدالة الرئيسية الأم للدالة المرسومة هى



$a)|x|$	$b)\sqrt{x}$
$c)x^2$	$d)x$

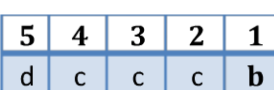
❹ أي الدوال الأتية مداها $f(x)|f(x) \le 0$

$a)|x|$	$b)\sqrt{x}$
$c)\ -|x|$	$d)x$

❺ أي ممايلي يكون فيه $f\left(\frac{-1}{2}\right) \neq -1$

$a)f(x) = 2x$	$b)f(x) = -4x^2$
$c)\ f(x) = [\![x]\!]$	$d)f(x) = |2x|$

مفاتيح الحل



5	4	3	2	1
d	c	c	c	b



عماد الجزيري
مؤلف كتاب المعاصر

١٢ الإحتمالات

١ مقدمة

❖ احتمال حدث A هو $P(A)$

$$P(A) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث}}{\text{عدد النواتج كلها}}$$

❖ حساب المضروب بدون أله

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$
$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$
$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$
$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

❖ حساب التباديل بدون اله

مثلا عند حساب 5 تباديل 2

نبدأ بـ 5 ونعد رقمين فقط $\quad {}_5P_2 = 5 \times 4 = 20$

$${}_5P_4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

نبدأ بـ 5 ونعد 4 أرقام

❖ حساب التوافيق بدون اله

مثلا عند حساب 7 توافيق 3

نبدأ بـ 7 في البسط ، 3 في المقام $\quad {}_7C_3 = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35$

$${}_6C_2 = \frac{6\times5}{2\times1} = 15$$

٢ الفرق بين التباديل والتوافيق في حساب الاحتمال

يستخدم المضروب في حالة تبديل عدد من العناصر مع نفسه

مثال ① بكم طريقة يمكن أخذ صورة لمجموعة من الأشخاص عددهم 4

الحل هنا يتم تبديل 4 اشخاص مع نفسهم

عدد الطرق $\quad 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

مثال ② بكم طريقة يمكن وضع 3 كتب على رف في صف واحد

الحل هنا يتم تبديل 3 كتب مع نفسهم

عدد الطرق $\quad 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

نستخدم التباديل عند إختيار مجموعة صغيرة من مجموعة كبيرة ونقوم بتباديل العناصر فيما بينهما على أن يكون هذا الترتيب هام وكلما تغير الترتيب يؤدي لنواتج مختلفة

مثال ③ يريد مصور أخذ صورة لـ 4 اشخاص من بين 6 أشخاص فكم عدد الصور الممكنة

الحل هنا يتم اختيار 4 من بين 6 والتبديل بينهما وحيث أن التغير في الترتيب يؤدي إلي نواتج مختلفة

فنستخدم التباديل

$${}_6P_4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

تستخدم التوافيق عند اختيار مجموعة صغيرة من مجموعة كبيرة وتبديلها مع بعضها لكن تبديل العناصر مع بعضها لا يؤدي لنواتج مختلفة

مثال ④ يريد صاحب شركة اختيار 3 موظفين من بين 5 موظفين للفوز بجائزة العمرة

الحل اختيار 3 موظفين من 5 وحيث أن ترتيب الموظفين المختارين غير هام فنستخدم التوافيق

$${}_5C_3 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

مثال ⑤ يتكون مجلس إدارة شركة من 6 أعضاء ما احتمال اختيار 2 منهما على أن يكون فيصل هو الرئيس ومهند هو النائب

الحل هنا يتم اختيار 2 من بين 6 وحيث أن ترتبهما مهم بسب أن احدهما رئيس و الاخر نائب لذلك نستخدم التباديل

العدد الكلي $\quad {}_6P_2 = 6 \times 5 = 30$

عدد الحدث هو 1 لأن فيصل رئيس ومهند نائب يكون مرة واحدة لذلك فإن الاحتمال هو $\frac{1}{30}$

مثال ⑥ يريد مدرب كرة الطائرة اختيار 6 لاعبين من بين 10 لخوض المباراة فما احتمال أن يكونوا محمد وعبدالله وعيسى وخالد وفيصل وطلال

الحل حيث أن اختيار الاعبين يكون عشوائي والتبديل فيما بينهما غيرهام لذلك نستخدم التوافيق

العدد الكلي $_{10}C_6 = \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5}{6\times5\times4\times3\times2\times1} = 210$

عدد الحدث هو 1

الاحتمال هو $\frac{1}{210}$

مثال ⑦ يريد مصور أخذ صورة لـ احمد و محمد و محمود و سعيد أوجد احتمال أن يقف أحمد في اليمين ومحمد في اليسار

الحل عدد الترتيبات الكلية هو $4! = 24$

بعد تثبيت احمد ومحمد يصبح لدينا اثنين فقط يتم التبديل فيما بينهما فيكون

عدد الحدث هو $2! = 2$

الاحتمال = $\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$

③ التباديل الدائرية

عند ترتيب عدد من العناصر عددها n في صورة دائرة فإن عدد الترتيبات هو $(n-1)!$

مثال ⑧ ماهو عدد ترتيب 4 أشخاص في حلقة دائرية

الحل عدد الترتيبات هو $(4-1)! = 3! = 6$

مثال ⑨ ماهو احتمال ترتيب الاشكال الهندسية امامك في صورة دائرة بنفس الترتيب

الحل الاشكال الهندسية في صورة دائرة يكون عدد الترتيبات هو $(4-1)! = 3! = 6$

الاحتمال هو $\frac{1}{6}$



ملحوظة

عند ترتيب العناصر بشكل دائري وكان أحد العناصر ثابت عند نقطة مرجعية فتتحول إلى تباديل خطيه عادية $n!$

مثال ⑩ ماهو عدد ترتيب 4 أشخاص في حلقة دائرية بحيث يكون أكبرهم بجانب الباب

الحل حيث أن جلوس أكبرهم جنب الباب هو تثبيت أحد العناصر لذلك نستخدم التباديل الخطية

$4! = 4\times3\times2\times1 = 24$

مثال ⑪ جلس 4 أشخاص على طاولة دائرية ما إحتمال أن يجلس الشخص الذي يدفع الفاتورة جنب النافذة

الحل حيث أن الشخص الذي يدفع الفاتورة يجلس عند النافذة فتتحول إلى تباديل خطية $4! = 24$

عدد الحدث عند تثبيت من يدفع الفاتورة جنب النافذة فاصبح لدينا 3 عناصر يتم تبديلها مع بعضها البعض $3! = 6$

الاحتمال $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

④ التباديل التكرارية

عند تباديل عدد من العناصر عددها n فيها تكرارات r_1 من المرات ، r_2 من المرات

$$\frac{n!}{r_1!\cdot r_2!\ldots\ldots\ldots}$$

مثال ⑫ ما احتمال تكوين كلمة ماليزيا من الحروف

م- ي – ل – ي – أ – ز- أ

الحل

عدد الحروف 7 وحرف أ مكرر 2 وحرف ي مكرر 2

عدد النواتج $\frac{7!}{2!\cdot2!} = 1260$

عدد الحدث هو 1 لتكوين كلمة ماليزيا واحدة

الاحتمال = $\frac{1}{1260}$



٥ الاحتمالات الهندسية

مثال ⑬ ما احتمال أن يكون الرمز البريدي لبيتك هو 36563 إذ تم اختياره من الأرقام 3,5,3,6,6

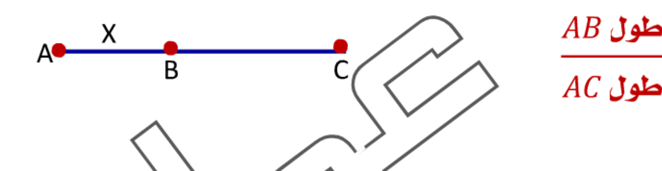
الحل عدد النواتج $30 = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1} = \frac{5!}{2!\times2!}$

عدد الحدث هو 1

الاحتمال = $\frac{1}{30}$

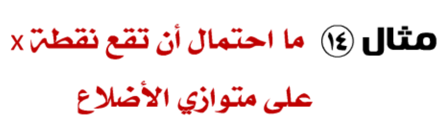
احتمال ان تقع النقطة X على AB هو

$\frac{\text{طول } AB}{\text{طول } AC}$



احتمال ان تقع النقطة X على الدائرة هو

$\frac{\text{مساحة الدائرة}}{\text{مساحة المستطيل}}$



مثال ⑭ ما احتمال أن تقع نقطة x على متوازي الأضلاع

الحل نوجد مساحة متوازي الأضلاع

= طول القاعدة × الارتفاع = 5 × 4 = 20

مساحة شبه المنحرف =

$\frac{1}{2}$ (مجموع القاعدين المتوازيتين)× الارتفاع

$\frac{1}{2}$= (5 + 8) × 4 = 26

الاحتمال = $\frac{\text{مساحة متوازي الاضلاع}}{\text{مساحة شبه المنحرف}} = \frac{20}{26} = \frac{10}{13}$

مثال ⑮ إذا اخترت نقطة داخل المستطيل فما احتمال وقوعها على الدائرة

الحل



مساحة الدائرة = $\pi r^2 = \pi \cdot 4^2$

مساحة المستطيل = 16×10 =160

الاحتمال = $\frac{\text{مساحة الدائرة}}{\text{مساحة المستطيل}} = \frac{\pi\cdot16}{10\times16} = \frac{\pi}{10}$

٦ الأحداث المستقلة

تكون الأحداث B , A مستقلة إذا كان وقوع أحدهما لايؤثر في وقوع الأخر

$$P\left(A \text{ و } B\right) = P(A)\cdot P(B)$$

مثال ⑯ القى مكعب مرقم من 1 إلى 6 وقطعة نقد فما احتمال ظهور الشعار والعدد 6

الحل حيث ان الأحداث مستقلة

احتمال ظهور الشعار هو $\frac{1}{2}$

احتمال ظهور العدد 6 هو $\frac{1}{6}$

$$P\left(A \text{ و } B\right) = P(A)\cdot P(B) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

مثال ⑯ إذا القيت قطعة نقد 4 مرات متتالية فما احتمال ظهور الكتابة أربع مرات

الحل الاحتمال هو $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

٧ الأحداث الغير مستقلة

تكون الأحداث B , A مستقلة إذا كان وقوع أحدهما يؤثر في وقوع الأخر

(مسائل بدون إرجاع)

الاحتمال هو

(احتمال الأول) × (احتمال الثاني بعد استبعاد الأول)

مثال ⑰ صندوق فيه 15 كره حمراء ، 5 كره أسود ما احتمال سحب كرتين أحمر واحده تلو الأخر بدون إرجاع

الحل

الاحتمال هو (احتمال الأولى أحمر) ×(احتمال الثانية أحمر بعد استبعاد الاولى)

$$\frac{10}{15}\times\frac{9}{14} = \frac{6}{7}$$

مثال ⑱ سحبت كرة حمراء عشوائياً من كيس يحتوي على كرتين زرقاء ، 9 حمراء دون إرجاع ما إحتمال سحب كرة ثانية حمراء

الحل عدد الكرات كله هو 11 وتم سحب كرة حمراء فيكون الباقي هو 10 كرات منها 8 أحمر

احتمال سحب كرة حمراء مرة ثانية هو $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

❽ الاحتمال الشرطي (الفضاء المختزل)

وفيه يتم وضع شرط لاختزال الفضاء إلى فضاء أصغر ويتم حساب الاحتمال عليه فقط

مثال ⑲ عند رمي مكعب مرتين متتاليتين وملاحظة الوجه العلوي في كل مره ما إحتمال ظهور العدد 4 على أحدهما إذا كان مجموع العددين هو 9

الحل

هنا تم وضع شرط وهو أن مجموع العددين 9 لذلك لابد من تعين المجموع 9 و اعتباره هو الفضاء

مجموع العددين 9 هو $(5,4)$ و$(4,5)$ و$(6,3)$ و$(3,6)$

عدد مرات ظهور العدد 4 هو 2

وبذلك يصبح الاحتمال $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

مثال ⑳ عند رمي مكعب أرقام مرة واحدة ما احتمال ظهور العدد 5 إذا كان الظاهر هو عدد فردي

الحل

هنا تم وضع شرط وهو أن العدد الظاهر فردي

لذلك لابد من تعين العدد الفردي و اعتباره هو الفضاء

العدد الفردي $\{1,3,5\}$

عدد مرات ظهور العدد 5 هو 1

الاحتمال هو $\frac{1}{5}$

مثال ㉑ الجدول التالي يوضح عدد الناجحين والراسبين

	أخذ حصص	لم يأخذ حصص
ناجح	20	15
راسب	35	30

ما احتمال ناجح علماً بأنه أخذ حصص

الحل هنا تم وضع شرط بأنه أخذ حصص

لذلك يتم تعين ما أخذ حصص كله = 20+35 = 55

بعد ذلك ناخذ منهم ماهو ناجح فقط وهو 20

الإحتمال = $\frac{20}{55} = \frac{4}{11}$

❾ الأحداث المتنافية

يقال أن A, B أحداث متنافية إذا كان $A \cap B = \emptyset$

$$P\left(A \text{ أو } B\right) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال ㉒ رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 ما احتمال عدد أقل من 3 أو عدد فردي على الوجه الظاهر

الحل A عدد أقل من 3 هو $\{1,2\}$ ويكون $P(A) = \frac{2}{6}$

B عدد فردي هو $\{1,3,5\}$ ويكون $P(B) = \frac{3}{6}$

$$A \cap B = \{1\} \to P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P\left(A \text{ أو } B\right) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

مثال ㉓ مكتبة فيها 6 كتب دينية ، 4 كتب رياضيات 3 كتب فيزياء ما احتمال سحب كتاب ديني أو فيزياء

الحل

$$= P\left(\text{ديني}\right) + P\left(\text{فيزياء}\right) - P\left(\text{فيزياء و ديني}\right)$$

$$= \frac{6}{13} + \frac{3}{13} - \frac{0}{13} = \frac{9}{13}$$





⑩ الدراسة المسحية – التجريبية - الملاحظة

❖ الدراسة المسحية جمع البيانات عن طريق الإستبيان

❖ الدراسة بالملاحظة هو تسجيل الملاحظات دون محاولة التأثير على العينة

❖ الدراسة التجريبية
هو تسجيل الملاحظات ولكن بعد اجراء اي تعديل على العينة

مثال ㉔ عند ارسال استبانة إلى المدارس الحكومية والخاصة لاستطلاع رأيهم في مادة الرياضيات تكون نوع الدراسة هو

$b)$ دراسة بالملاحظة $a)$ دراسة تجريبية

$d)$ ارتباط $c)$ دراسة مسحية

الحل نوع الدراسة مسحية لأنها إستبانة

مثال ㉕ تم تقسيم عينه من الفئران إلى نصفين وإعطاء احدهما دواء لمعرفة مدى فاعليته على مرض معين فإن نوع الدراسة هو

$b)$ دراسة بالملاحظة $a)$ دراسة تجريبية

$d)$ ارتباط $c)$ دراسة مسحية

الحل نوع الدراسة تجريبية

مثال ㉖ نريد معرفة إذا كان التدخين لمدة 10 سنوات يؤثر في سعة الرئة أم لا

$b)$ دراسة بالملاحظة $a)$ دراسة تجريبية

$d)$ ارتباط $c)$ دراسة مسحية

الحل نوع الدراسة بالملاحظة

⑪ مقاييس النزعة المركزية

❖ الوسط الحسابي يستعمل في حالة عدم وجود قيم متطرفة وتكون البيانات قريبة من بعضها

❖ الوسيط يستعمل عند وجود قيمة متطرفة ولاتوجد فراغات كبيرة في المنتصف

❖ المنوال يستعمل في حالة وجود تكرارات

مثال ㉗ أي مقاييس النزعة المركزية هوالانسب
10,11,11,15,10,11,12,13,14,17,11

$b)$ وسط حسابي $a)$ وسيط

$d)$ منوال $c)$ انحراف

الحل المنوال بسبب تكرار البيانات

مثال ㉘ أي مقاييس النزعة المركزية هوالأنسب
14,15,16,18,20,23,24

$b)$ وسط حسابي $a)$ وسيط

$d)$ منوال $c)$ انحراف

الحل الوسط الحسابي لعدم وجود قيم متطرفة

⑫ هامش الخطأ

هامش الخطأ لمجموعة n من مجتمع هو $\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$

مثال ㉙ في دراسة مسحية تشتمل 100 طالب أفاد 85% منهم أن حصة التربية الرياضية هامة إحسب هامش الخطأ وماهى الفترة الممكنة التى تكون فيها حصة التربية الرياضية ممكنه

الحل هامش الخطأ $= \pm\frac{1}{\sqrt{100}} = \pm\frac{1}{10} = \pm 0{,}1$

بداية الفترة هى $0{,}85 - 0{,}1 = 0{,}75$

نهاية الفترة هى $0{,}85 + 0{,}1 = 0{,}95$

وتكون بذلك الفترة من 75٪ إلى 95٪

⑬ القيمة المتوقعة

هى مجموع لحواصل ضرب كل قيمة للمتغير العشوائي في إحتماله

مثال ⑶⓪ أوجد القيمة المتوقعة عند رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحده

الحل

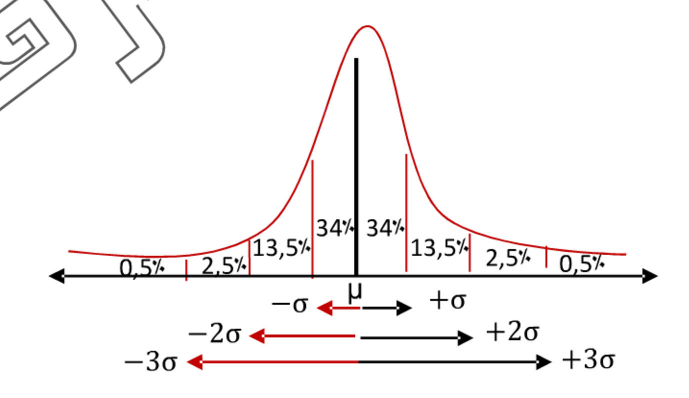
قيم المتغير العشوائي هى $\{1,2,3,4,5,6\}$

واحتمال كل منها هو $\frac{1}{6}$

القيمة المتوقعة هي

$$1\left(\frac{1}{6}\right)+2\left(\frac{1}{6}\right)+3\left(\frac{1}{6}\right)+4\left(\frac{1}{6}\right)+5\left(\frac{1}{6}\right)+6\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{21}{6}$$

⑭ التوزيع الطبيعي

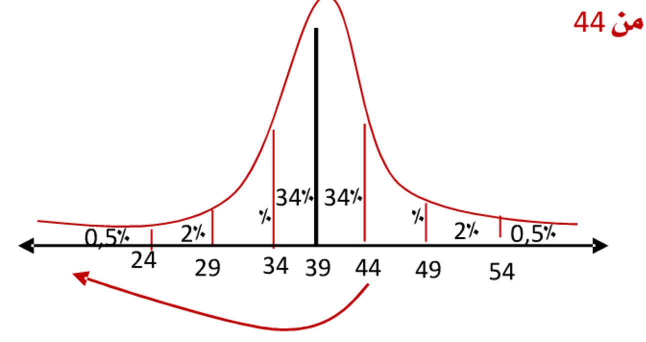


صفات المنحنى

المسحة كلها = 1

المساحة ناحية اليمين 0,5 والمساحة ناحية اليسار 0,5

مثال ⑶① إذا كان المنحنى أمامك هو منحنى توزيع طبيعي لمتغير عشوائي فما احتمال أن يكون قيمته أقل من 44



الحل $P(X \leq 44) = 34 + 34 + 13,5 + 2 + 0,5 =$

$= 84\%$

⑮ توزيع ذات الحدين

تجربة ذات الحدين هى تجربه فيها يكون الحدث له احتمال للنجاح و احتمال للفشل

إذا كانت P تعبر عن احتمال نجاح الحدث ، q تعبر عن احتمال فشل نفس الحدث

فإنه عند إجراء عدد n من المحاولات المستقلة لهذه التجربة يكون

- ❖ المتوسط الحسابي هو np
- ❖ التباين هو $\sigma^2 = npq$
- ❖ الانحراف المعياربي هو $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

مثال ⑶① في تجربة ذات الحدين إذا تم إجراء 100 محاولة مستقلة وكان احتمال النجاح هو 25% فماهو الوسط الحسابي والتباين

الحل

$n = 100 \quad , \quad p = 25\% \quad , q = 75\%$

الوسط الحسابي $np = 100 \times \frac{25}{100} = 25$

التباين $npq = 100 \times \frac{25}{100} \times \frac{75}{100} = \frac{25\times75}{10000} = 18,75$

تدريب 1 يقف رجلان وولدان في صف واحد ، فما احتمال أن يقف رجل عند كل طرف من طرفي الصف إذا اصطفوا بشكل عشوائي

a) $\frac{1}{6}$	b) $\frac{1}{24}$	c) $\frac{1}{2}$	d) $\frac{1}{12}$

تدريب 2 إذا اخترت تبديلاً لأحرف المبينة أدناه عشوائياً ، فما احتمال أن تتكون كلمة فسيفساء

ا	ي	ف	س	ء	ف

a) $\frac{1}{1260}$	b) $\frac{1}{24}$	c) $\frac{1}{620}$	d) $\frac{1}{12}$

تدريب 3 ماهو أفضل وصف





فيديو شرح التجميعات

تجميعات 1437

❶ أي مقاييس النزعة المركزيه يناسب البيانات التاليه بشكل أفضل

15 ، 46 ، 52 ، 47 ، 75 ، 42 ، 53 ، 45

a) الوسيط　　b) التباين

c) الوسط　　d) المنوال

❷ حادثة ذات حدين تكررت 20 مرة وكان المتوسط 12 اوجد الانحراف المعياري

$a)\ \sqrt{4,8}$　　$b)\ 4,8$

$c)\ 1,2$　　$d)\ \sqrt{1,2}$

❸ تتوزع مجموعة بيانات توزيعا طبيعيا وسطه الحسابي 12 وانحرافه المعياري 2 فما قيمة

$p(10 < x < 16)$

$a)\ 47,5\%$　　$b)\ 40\%$

$c)\ 81,5\ \%$　　$d)\ 85\%$

تجميعات 1436

❹ ما إحتمال أن تنجنب عائلة صبي في 3 مرات ولادة متتالية

$a)\ \frac{1}{6}$　　$b)\ \frac{1}{2}$

$c)\ \frac{1}{12}$　　$d)\ \frac{1}{8}$

❺ إذا ألقى حجرا نرد متمايزين مرة واحدة فما إحتمال أن يظهر وجهين مجموعهما 8

$a)\ \frac{5}{6}$　　$b)\ \frac{5}{36}$

$c)\ \frac{2}{25}$　　$d)\ 30$

❻ في دراسة أجريت على أوزان الطلاب في المرحلة الابتدائية كانت القراءات كما يلي

26	19	28	26	28	27	26	27
26	22	42	26	29	26	26	25
25	27	40	27	30	27	25	27

أي مقياس النزعة المركزية أكثر ملائمة لهذه القراءات

a) الوسيط　　b) التباين

c) الوسط　　d) المنوال

❼ في الشكل الأتي ما إحتمال وقوع نقطة على المستقيم bc

4　6　8

a　b　c　d

$a)\ \frac{1}{6}$　　$b)\ \frac{1}{3}$

$c)\ \frac{1}{12}$　　$d)\ \frac{1}{8}$

❽ يتوزع عمر 10000 مصباح كهربي توزيع طبيعي بمتوسط حسابي 300 يوم وإنحراف معياري 40 يوم كم مصباح يقع عمره بين 260 يوماً ، 340 يوماً

$a)\ 2500$　　$b)\ 3400$

$c)\ 5000$　　$d)\ 6800$

❾ يريد على أن يختار 2 كتاب من بين 6 كتب مختلفة ، بكم طريقة يمكنه القيام بذلك ؟

$a)\ 25$　　$b)\ 34$

$c)\ 50$　　$d)\ 15$

مفاتيح الحل

9	8	7	6	5	4	3	2	1
d	d	b	d	b	d	c	a	ج

تجميعات 1435

⑧ أجريت دراسة مسحية على 100 شخص قالوا أن 47٪ من القراءة مفيدة فأي عينة من الأشخاص قالوا أنها مفيدة

أ) بين 23 ٪ و 50 ٪ ب) بين 37٪ و 57 ٪

ج) بين 30٪ و 46٪ د) بين 54٪ و 56٪

⑨ يراد إختيار طالبين من بين 20 طالب ما إحتمال أن يكون الطالبان هما عمر ومصعب

$a)\ \frac{1}{90}$ $b)\ \frac{1}{190}$

$c)\ \frac{1}{19}$ $d)\ \frac{1}{380}$

⑩ إذا كان $n! = 120$ فإن قيمة $(n-1)!$ هي

$a)\ 50$ $b)\ 60$

$c)\ 25$ $d)\ 24$

⑪ رمى مكعب مرقم من 1 إلى 6 ، ما احتمال ظهور عدد أقل من 3 أو عدد فردي على الوجه الظاهر

$a)\ \frac{1}{6}$ $b)\ 1$

$c)\ \frac{2}{3}$ $d)\ \frac{5}{6}$

⑫ أجريت دراسة على درجات الحرارة في فصل الشتاء بمنطقة ورصدت درجات الحرارة خلال إسبوع فكانت على النحو التالي 12 و 11 و 13 و 13 و 15 و 19 و 15 ما متوسط درجات الحرارة خلال هذا الإسبوع

أ) 13 ب) 14

ج) 15 د) 16

⑭ إذا كانت A, B حادثتين في فضاء لتجربة عشوائية ما بحيث كان $p(A) = 0{,}2 \quad p(B) = 0{,}5$ وكان $P(A \cup B) = 0{,}4$ فماقيمة $P(A|B)$

$a)\ 0{,}6$ $b)\ 0{,}7$

$c)\ 0{,}8$ $d)\ 24$

⑮ في مجموعة من تسعة أعدادمختلفه أي ممايأتي لايؤثر في الوسيط

A مضاعفة كل عدد

B زيادة كل عدد بمقدار 10

C زيادة القيمة الصغرى فقط

D زيادة القيمة الكبرى فقط

⑯ يحتوي صندوق على 4 كرات حمراء ، 6 صفراء ، 4 كرات خضراء وكرتين زرقاء مااحتمال سحب كرة ليست صفراء

$a)\ \frac{5}{8}$ $b)\ \frac{3}{8}$

$c)\ \frac{1}{8}$ $d)\ 8$

⑰ إذا رمى مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة ، فما احتمال ظهور عدد أقل من 4

$a)\ \frac{1}{2}$ $b)\ \frac{1}{6}$

$c)\ \frac{2}{3}$ $d)\ \frac{1}{3}$

⑱ يحتوي صندوق على 7 أقلام رصاص حمراء مبرية و 5 أقلام رصاص صفراء مبرية و 5 أقلام صفراء غير مبرية ، إذا تم سحب قلم من الصندوق فما احتمال أن يكون القلم اصفر ، علمابأنه من الأقلام المبرية

a) $\frac{1}{5}$	b) $\frac{5}{10}$	c) $\frac{7}{15}$	d) $\frac{5}{12}$

مفاتيح الحل

18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8
d	a	a	d	a	ب	c	d	d	b	ب



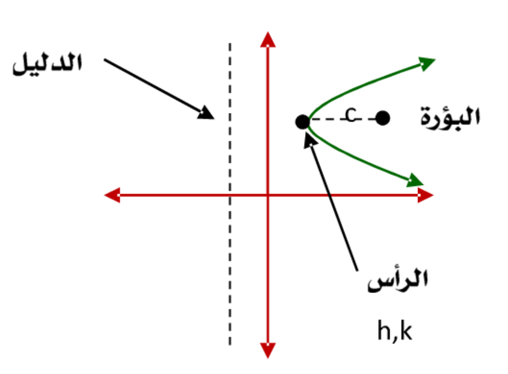
فيديو شرح التجميعات

١٣ القطوع

١ القطع المكافئ

$$(y-k)^2 = 4c(x-h)$$

حيث معادلة القطع المكافئ المفتوح جهة x^+



h هي الإزاحة ناحية اليمين أو اليسار

K هى الإزاحة لأعلى أو لأسفل

C البعد بين رأس القطع والبؤرة وهو نفسه البعد بين الرأس والدليل

صفات القطع من المعادلة (المفتوح في x)

$$(y-k)^2 = +\ 4c(x-h)$$

k	+	c	h

من القوس الأيمن نستطيع إيجاد

البؤرة $(h+c\,,k)$

معادلة الدليل $x = h - c$

من القوس الأيسر نستطيع إيجاد

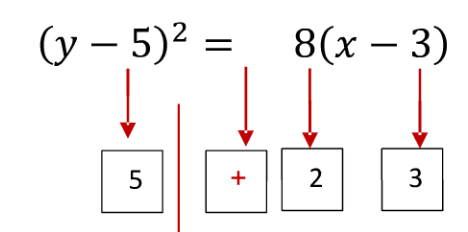
معادلة محور التماثل $y = k$

الراس (h,k) طول الوتر البؤري $4c$

لمزيد من الفهم والتوضيح لديك الفيديو التي

فيديو شرح

مثال ١ القطع المكافئ الذي معادلته



$$(y-5)^2 = \ 8(x-3)$$

5	+	2	3

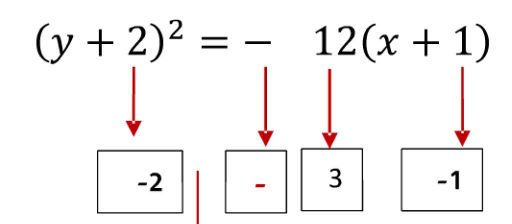
البؤرة $(3+2{,}5) = (5{,}5)$

معادلة الدليل $x = 3 - 2 = 1$

معادلة محور التماثل $y = 5$

الراس $(3{,}5)$ طول الوتر البؤري 8

مثال ٢ القطع المكافئ الذي معادلته



$$(y+2)^2 = -\ 12(x+1)$$

-2	-	3	-1

البؤرة $(-1-3,-2) = (-4,-2)$

معادلة الدليل $x = -1 + 3 = 2$

معادلة محور التماثل $y = -2$

الراس $(-1,-2)$ طول الوتر البؤري 12

مثال ٣ القطع المكافئ الذي معادلته

$$y^2 \quad = \quad 5x$$

0	+	$\frac{5}{4}$	0

البؤرة $\left(0+\frac{5}{4},0\right) = \left(\frac{5}{4},0\right)$

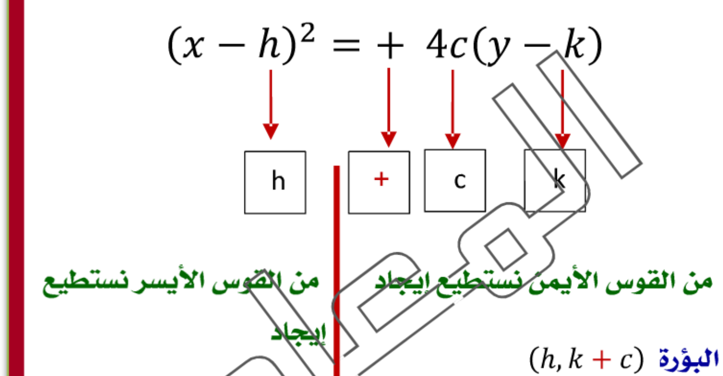
معادلة الدليل $x = 0 - \frac{5}{4} = \frac{-5}{4}$

معادلة محور التماثل $y = 0$

الراس $(0{,}0)$ طول الوتر البؤري $\frac{5}{4}$

صفات القطع من المعادلة (المفتوح في y)

$$(x-h)^2 = +\ 4c(y-k)$$



من القوس الأيمن نستطيع إيجاد

البؤرة $(h, k+c)$

معادلة الدليل $y = k - c$

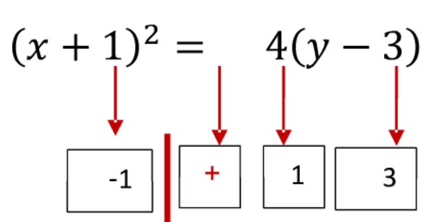
من القوس الأيسر نستطيع إيجاد

معادلة محور التماثل $x = h$

الراس (h,k) **طول الوتر البؤري** $4c$

مثال ④ القطع المكافئ الذي معادلته

$$(x+1)^2 = \ 4(y-3)$$



البؤرة $(-1,3+1) = (-1,4)$

معادلة الدليل

$y = 3 - 1 = 2$

معادلة محور التماثل

$x = -1$

الرأس $(-1,3)$ **طول الوتر البؤري** 4

تكوين المعادلة من صفات القطع

مثال ⑤ أي القطوع التالية رأسه $(2,1)$

$a)\ (y+2)^2 = 3(x-1)$ $\quad b)\ (x-2)^2 = 3(y-1)$

$c)\ (y-2)^2 = 3(x-2)$ $\quad d)\ (x+2)^2 = 3(y+1)$

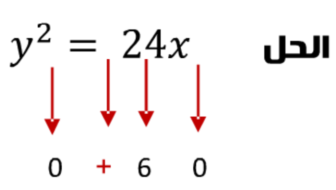
الحل الحل الصحيح هو b

مثال ⑥ ماهى معادلة الدليل للقطع $y^2 = 24x$

$a)\ y = 6$ $\quad b)\ y = -6$

$c)\ x = 6$ $\quad d)\ x = -6$

الحل $y^2 = 24x$



معادلة الدليل هو $x = 0 - 6 = -6$

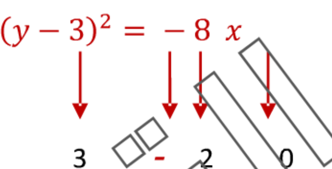
مثال ⑦ ماهى معادلة محور التماثل للقطع

$$(y-3)^2 = -8x$$

$a)\ y = 3$ $\quad b)\ y = -2$

$c)\ x = 3$ $\quad d)\ x = -3$

الحل $(y-3)^2 = -8x$

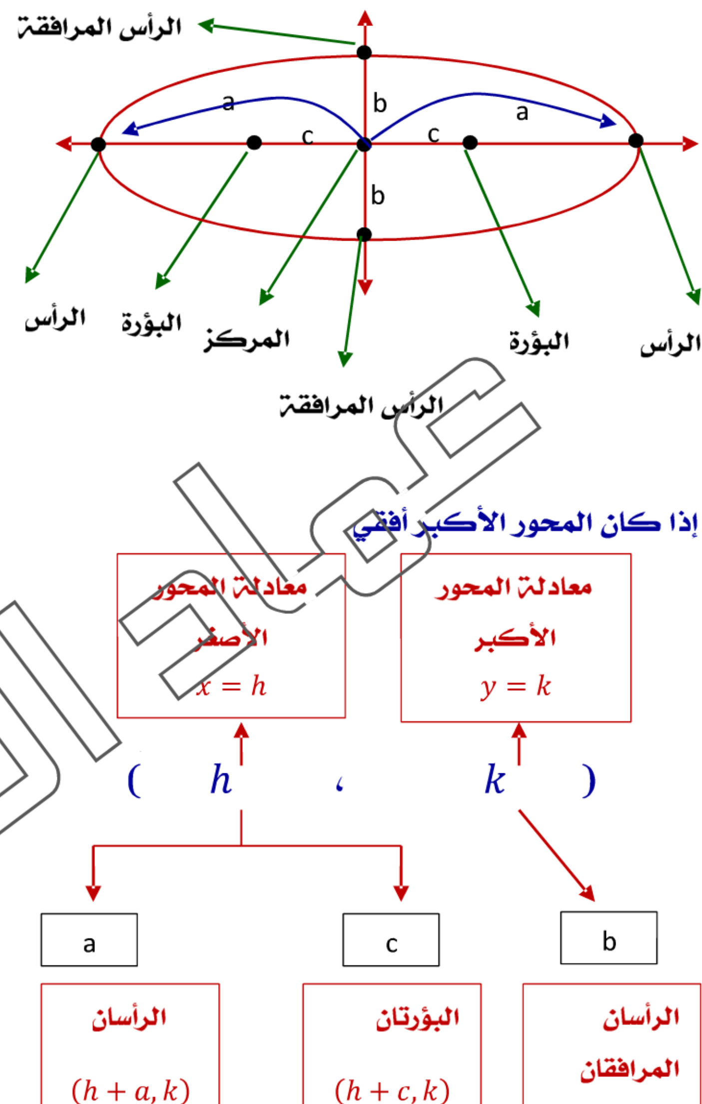


ويتضح أن معادلة محور التماثل هى $y = 3$



٢ القطع الناقص

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



$$c^2 = a^2 - b^2$$

طول المحور الأكبر هو 2a

طول المحور الأصغر هو 2b

المسافة بين البؤرتين هو 2c

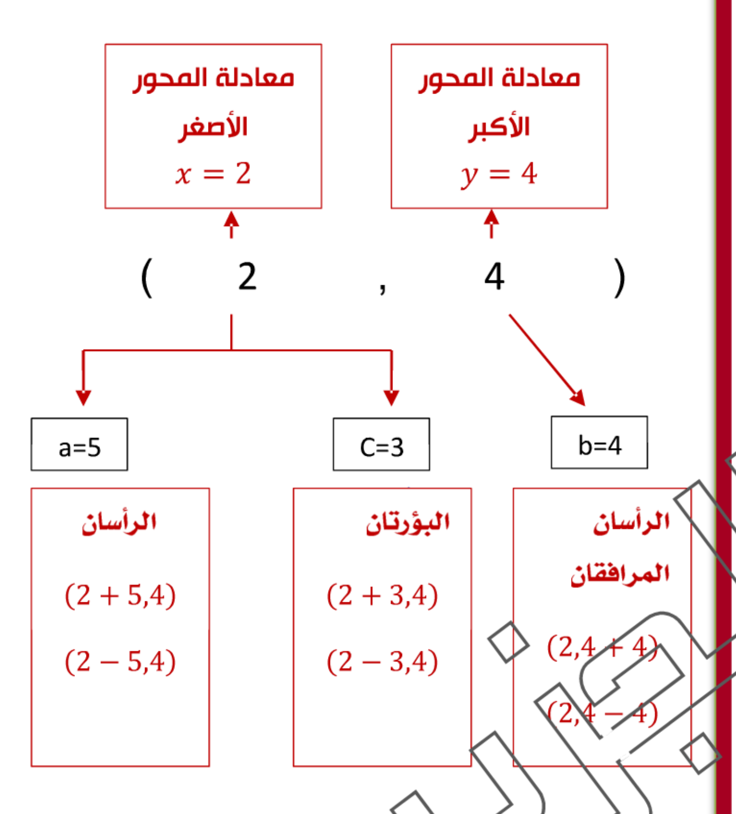
مثال ① **حدد خصائص القطع الذي معادلته**

$$\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{16}=1$$

$$a^2 = 25 \qquad \rightarrow a = 5$$

$$b^2 = 16 \qquad \rightarrow b = 4$$

$$c^2 = 25 - 16 = 9 \qquad \rightarrow c = 3$$



ملحوظة إذا علمت الرأسان او الرأسان المرافقان أو البؤرتين نستطيع الحصول على المركز

المركز هو $\frac{\text{جمع } x}{2} , \frac{\text{جمع } y}{2}$

مثال ② **ماهو مركز القطع الناقص الذي رأساه**

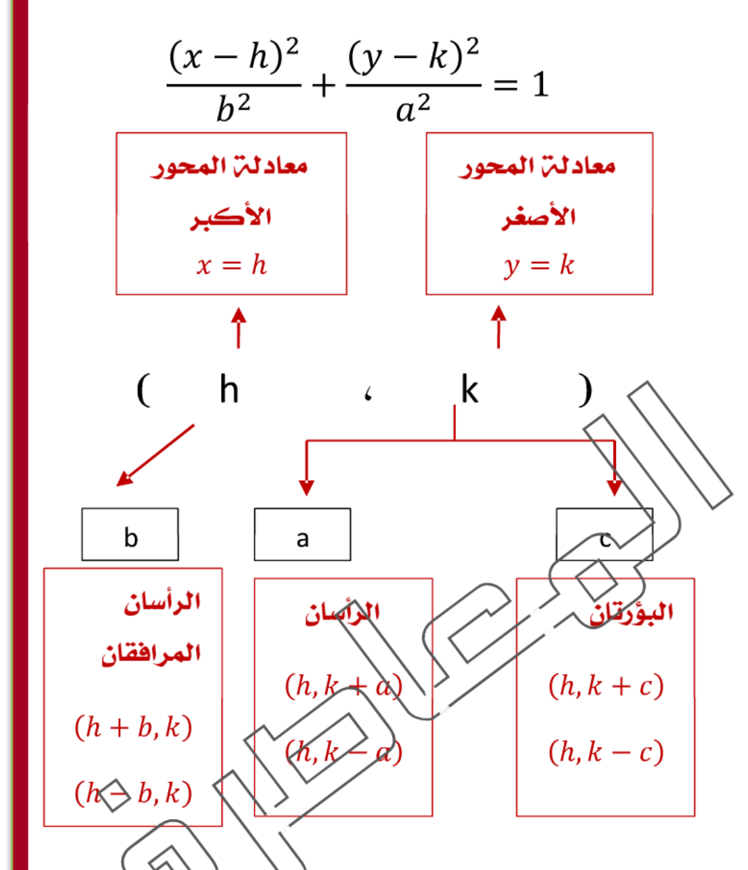
$(2,3)$, $(8,3)$

الحل المركز هو $\left(\frac{2+8}{2},\frac{3+3}{2}\right) =$

$(5,3)$



إذا كان المحور الأكبر رأسي



مثال ③ أوجد خصائص القطع الناقص الذي معادلته

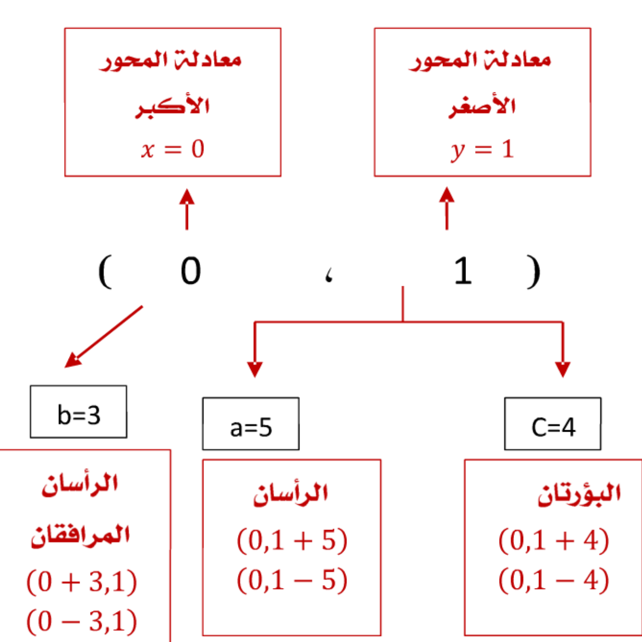
$$\frac{x^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$$

الحل

$a^2=25\rightarrow a=5$

$b^2=9\rightarrow b=3$

$c^2=25-9=16\rightarrow c=4$



ملحوظة

- ❖ المسافة بين الرأسين هو 2a
- ❖ المسافة بين البؤرتين هو 2c
- ❖ المسافة بين الرأسين المرافقين 2b

مثال ④ في القطع الناقص الذي رأساه المرافقان هما $(1,7)$و$(1,-3)$ طول المحور الأصغر يكون ....

الحل حيث أن قيمة x في النقاط لاتتغير

فإن التغير في قيمة y هو المسافة المطلوبة

$7-(-3)=10$

مثال ⑤ في القطع الناقص الذي معادلته $\frac{(x-5)^2}{12}+\frac{(y-7)^2}{20}=1$ تكون معادلة المحور الأكبر

$a)y=5$ $\quad$ $b)\ y=7$

$c)\ x=5$ $\quad$ $d)x=7$

الحل المحور الأكبر رأسي

معادلة المحور الأكبر $x=5$

(5 ، 7)

b   a   C

مثال ⑥ المسافة بين المركز والبؤرة للقطع $\frac{(x-5)^2}{36}+\frac{(y-7)^2}{25}=1$ هي

$a)5$ $\quad$ $b\sqrt{11}$

$c)11$ $\quad$ $d)6$

الحل لابد من تعين c

$c^2=36-25=11$

$c=\sqrt{11}$

مثال ⑦ طول المحور الأصغر في القطع $\frac{(x-5)^2}{36}+\frac{(y-7)^2}{25}=1$ هى

$a)5$ $\quad b)36$

$c)10$ $\quad d)6$

الحل لابد من تعين b أولاً

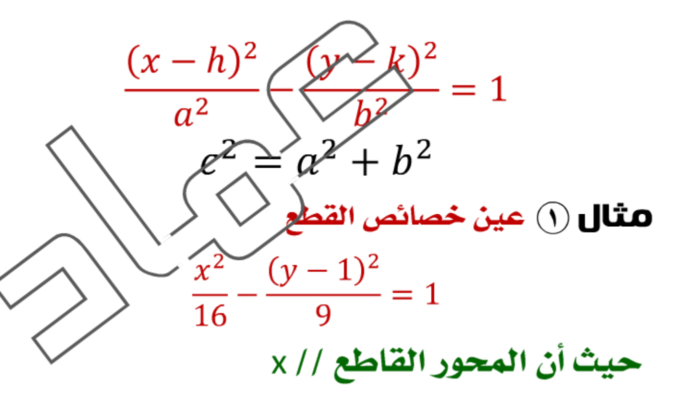
$b^2=25 \to b=5$

طول المحور الأصغر هو $2b=10$

③ القطع الزائد

بنفس الطريقة التي عرضناها في القطع الناقص سوف يتم شرح القطع الزائد

معادلة القطع الذي فيه المحور القاطع // x



$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$c^2=a^2+b^2$$

مثال ① عين خصائص القطع

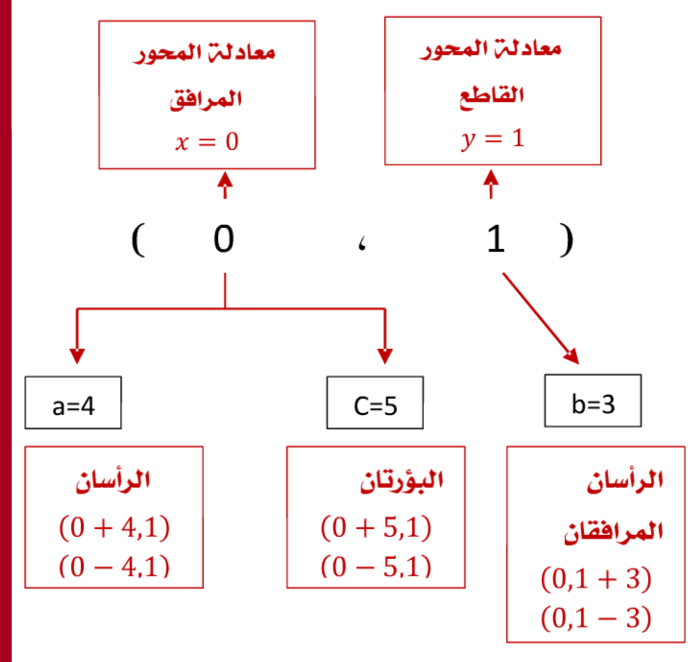
$$\frac{x^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{9}=1$$

حيث أن المحور القاطع // x

$a^2=16 \to a=4$

$b^2=9 \to b=3$

$c^2=16+9=25 \to c=5$



طول المحور القاطع $2a=8$

طول المحور المرافق $2b=9$

معادلة خطوط التقارب $y-1=\pm\frac{3}{4}(x-0)$

معادلة القطع الذي فيه المحور القاطع // y

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

مثال ② أوجد صفات القطع الذي معادلته

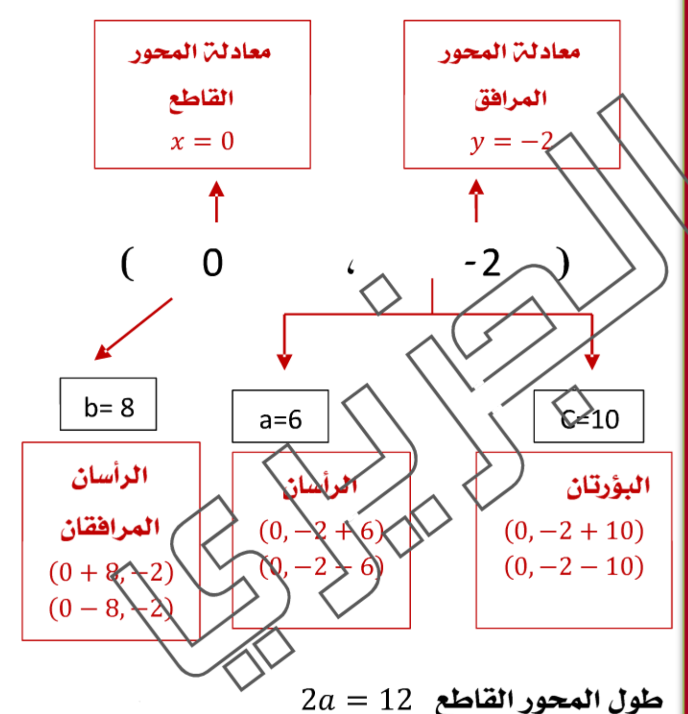
$$\frac{(y+2)^2}{36}-\frac{x^2}{64}=1$$

حيث أن المحور القاطع // y

$a^2=36 \to a=6$

$b^2=64 \to b=8$

$c^2=64+36=100 \to c=10$



طول المحور القاطع $2a=12$

طول المحور المرافق $2b=16$

معادلة خطوط التقارب $y+2=\pm\frac{6}{8}(x-0)$

مثال ③ في القطع الزائد $\frac{(x+5)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{16}=1$

البعد بين المركز والرأس هو

الحل البعد بين المركز والرأس هو a

$a^2=4 \to a=2$

٤ معامل الاختلاف المركزي

$$e = \frac{c}{a}$$

- في حالة القطع الناقص تكون e أصغر من 1
- في حالة القطع الزائد تكون e أكبر من 1
- في حالة الدائرة يكون e = صفر

مثال ① قطع ناقص المسافة بين البؤرتين 10 وطول المحور الأكبر 20 فإن معامل الإختلاف له هو ....

الحل

$2c = 10 \rightarrow c = 5$

$2a = 20 \rightarrow a = 10$

$e = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

مثال ② ماهو معامل الإختلاف المركزي للقطع

$$\frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{7} = 1$$

الحل $c^2 = 9 + 7 = 16 \rightarrow\rightarrow\rightarrow \quad c = 4$

$a^2 = 9 \rightarrow a = 3$

$e = \frac{3}{4}$

٥ تصنيف القطوع

المعادلة العامة للقطوع

$$ax^2 + bxy + cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$b^2 - 4ac$

- قطع مكافئ ← $= 0$
- قطع زائد ← = موجب
- قطع ناقص ← = سالب
- دائرة $b = 0 , a = c$ ← = سالب و



مثال ① المعادلة $x^2 - 5xy + 3y^2 - 2x + 5y$

هى معادلة

$a)$ قطع ناقص $\qquad b)$ قطع زائد

$c)$ قطع مكافئ $\qquad d)$ دائرة

الحل $a = 1 \; , b = -5 \;\; , c = 3$

قطع زائد $\quad b^2 - 4ac = 25 - 4 \times 1 \times 3 = 13$

مثال ② المعادلة $x^2 + y^2 - 2x + 5y$

هى معادلة

$a)$ قطع ناقص $\qquad b)$ قطع زائد

$c)$ قطع مكافئ $\qquad d)$ دائرة

الحل $a = 1 \; , b = 0 \;\; , c = 1$

وبذلك تصبح معادلة دائرة

٦ معادلة الدائرة

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

حيث (h,k) هى مركز الدائرة

r نصف قطر الدائرة

مثال ① $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$ معادلة دائرة

مركزها هو............ ونصف قطرها هو ....

الحل المركز هو $(-2,1)$ نصف القطر $\sqrt{5}$

مثال ② أي المعادلات هى معادلة دائرة مركزه نقطة الأصل

$a) x^2 + y^2 = 4 \qquad b) (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$

$c) 5x^2 + 3y^2 = 1 \qquad d) x + y = 1$

الحل الحل الصحيح هو a

مثال ③ أي النقاط الأتية تقع على الدائرة

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 9$$

$a)(1,2) \qquad b)\ (1,3)$

$c)(2,0) \qquad d)\ (1,0)$

الحل نقطة تقع على الدائرة أي تحقق معادلتها

وتجعل طرفها الأيسر = الأيمن

النقطة الصحيحة هو $d)\ (1,0)$ لأنه عند التعويض عن

$x = 1 , y = 0$ يكون الناتج 9

تجميعات 1437

❶ ما نوع القطع في المعادلة

$$4x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$$

أ قطع مكافئ   ب قطع زائد

ج قطع ناقص   د دائرة

❷ المعادلة $\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1$ هى لقطع زائد فماهى معادلتا خطى التقارب له

a) $y = \pm\frac{4}{5}x$	b) $y = \pm\frac{5}{4}x$
c) $y = \pm\frac{1}{5}x$	d) $y = \pm\frac{1}{5}x$

❸ ما المعادلة التي تمثل قطع مكافئ رأسه عند النقطة $(2,2)$ ويمر بالنقطة $(0,6)$

a) $y = x^2 - 4x + 6$	b) $y = x^2 - 4x - 6$
c) $y = -x^2 - 4x + 6$	d) $y = -x^2 + 4x + 6$

❹ ماهى معادلة القطع المكافئ الذي مركزة (0، 0) وطول وتره البؤري 12 ومفتوح في x الموجبة

a) $y^2 = 4x$	b) $y^2 = 12x$
c) $y^2 = 6(x+2)$	d) $x^2 = 12y$

❺ معادلة محور التماثل للقطع $y^2 = -8(x-1)$

a) $y = 0$	b) $y = -8$
c) $x = 1$	d) $x = 8$

❻ ما طول المحور الأكبر للقطع

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

a) 25	b) 9
c) 10	d) 6

❼ معادلة المحور الأكبر للقطع

$$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

a) $y = 0$	b) $y = 5$
c) $x = 3$	d) $x = 4$

❽ مركز القطع $\frac{(x-2)^2}{12} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1$ هو

a) $(2,3)$	b) $(2,-3)$
c) $(3,2)$	d) $(12,16)$

❾ في القطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ طول المحور القاطع هو

a) 6	b) 3
c) 4	d) 8

❿ في القطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ معادلتي خط التقارب هى

a) $y = \pm\frac{4}{5}x$	b) $y = \pm 5x$
c) $y = 4x$	d) $y = \pm\frac{5}{4}x$

⓫ معامل الإختلاف المركزي للقطع $\frac{x^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{16} = 1$

a) $e = 0$	b) $e = \frac{3}{5}$
c) $e = 1$	d) $= \frac{5}{3}$

مفاتيح الحل

11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
b	a	c	b	a	c	a	b	ج	b	a



فيديو شرح التجميعات

المؤلف/ عماد الجزيري المعاصر (3)

١٤ الهندسة التحليلية

١ ميل الخط المستقيم

ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال ١ ماهو ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين

$(3,2)\ ,\ \ (-2,-4)$

الحل $m = \frac{2-(-4)}{3-(-2)} = \frac{6}{5}$

مثال ٢ إذا كان ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين

$(2,k)\ ,\ \ (-1,4)$ هو 3 أوجد k

الحل $\frac{k-4}{2+1} = 5$

$k - 4 = 15 \rightarrow k = 19$

٢ معادلات الخط المستقيم

معادلة الخط المستقيم الذي ميله m ويقطع من y الجزء b

$$y = mx + b$$

مثال ١ المستقيم الذي معادلته $y = 3x - 2$

ميله هو .... والمقطع y هو ....

الحل الميل هو 3 ومقطع y هو -2

مثال ٢ المستقيم الذي ميله 4- والمقطع y هو 5

$a)\ y = -4x + 5$ $\quad b)\ \ y = 5x - 4$
$c)\ y = 4x + 5$ $\quad d)\ 5y = 4x$

الحل الحل الصحيح هو $a)\ y = -4x + 5$

معادلة الخط المستقيم الذي ميله m ويمر بالنقطة (x_1, y_1) هى

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال ٤ أي المعادلات الأتية لخط مستقيم ميله 3 ويمر بالنقطة $(2,1)$

$a)\ y = 3x + 5$ $\quad b)\ \ 2y = 3x - 4$
$c)\ y = 3x - 5$ $\quad d)\ 5y = 4x$

الحل الحل الصحيح هو $c)\ y = 3x - 5$

لأن الميل 3 وعند التعويض بالنقطة $(2,1)$ نجد أن

الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

مثال ٥ أي المعادلات الأتية لخط مستقيم ميله 3 ويمر بالنقطة $(2,1)$

$a)\ (y - 1) = 3(x - 2)$ $\quad b)\ \ 3(y + 1) = (x + 2)$
$c)\ (y - 2) = 3(x - 1)$ $\quad d)\ 5y = 4x$

الحل

الحل الصحيح هو $a)\ (y - 1) = 3(x - 2)$

المستقيمات المتوازية لها نفس الميل

المستقيمات المتعامدة حاصل ضرب ميليهما 1-

مثال ٦ أي المستقيمات الأتية عمودي على المستقيم $y = 3x - 4$

$a)\ y = \frac{-1}{3}x + 1$ $\quad b)\ y = -3x + 2$
$c)\ \ 3y = x + 5$ $\quad d)\ y = x - 3$

الحل

الحل الصحيح هو

$a)\ y = \frac{-1}{3}x + 1$

مثال ٧ أي المستقيمات الأتية موازي المستقيم

$y = 3x - 4$

$a)\ y = \frac{-1}{3}x + 1$ $\quad b)\ \ y = 3x + 2$
$c)\ \ 3y = x + 5$ $\quad d)\ y = x - 3$

الحل

الحل الصحيح هو

$b)\ \ y = 3x + 2$

❖ الخط المستقيم الرأسي الذي يقطع محور x في العدد a معادلته هي $x = a$

❖ الخط المستقيم الأفقي الذي يقطع محور y في العدد b معادلته هي $y = b$

مثال ① معادلة المستقيم الأفقي الذي يقطع محور y في العدد 7 هو

$a)\ y = -7$ $\quad b)\ y = 7$

$c)\ x = -7$ $\quad d)\ x = 7$

الحل

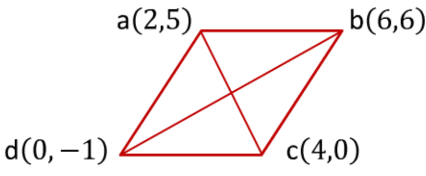
الحل الصحيح هو $b)\ y = 7$

إذا كان لدينا نقطتان $(x_1, y_1)\ ,\ (x_2, y_2)$

❖ المسافة بينهما $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

❖ نقطة المنتصف $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

مثال ② أوجد نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع



الحل نقطة تقاطع القطرين لمتوازي الأضلاع هي

نقطة منتصف أحد القطرين

نقطة المنتصف $\left(\frac{2+4}{2}, \frac{5+0}{2}\right) = \left(3, \frac{5}{2}\right)$

③ صورة نقطة بالإنعكاس

صورة نقطة تقع على خط الإنعكاس هي نفسها

النقطة	حول محور	الصورة
(a,b)	x	$(a,-b)$
(a,b)	y	$(-a,b)$
(a,b)	$y = x$	(b,a)

مثال ① صورة النقطة $(3,-2)$ بالإنعكاس حول محور x هي $(3,2)$

صورة النقطة $(3,-2)$ بالإنعكاس حول محور y =x هي $(-2,3)$

④ صورة نقطة بالإزاحة

صورة نقطة (x,y) بالازاحة هي $(x+a, y+b)$

❖ a تكون موجبة إذا كانت الازاحة لليمين

❖ a تكون سالبة إذا كانت الازاحة لليسار

❖ b تكون موجبة إذا كانت الازاحة لأعلى

❖ b تكون سالبة إذا كانت الازاحة لأسفل

مثال ① صورة النقطة $(-2,3)$ بإزاحة مقدارها 3 إلى اليمين وإزاحة مقدارها 5 لأسفل هي

$(-2+3, 3-5) \rightarrow (1,-2)$

مثال ② صورة النقطة $(3,5)$ بالإزاحة $(x-1, y+3)$ هي $(3-1, 5+3) \rightarrow (2,8)$

مثال ③ النقطة $(6,2)$ هي صورة النقطة $(4,5)$ عن طريق إزاحة هي

$a)\ (x+2, y-3)$ $\quad b)\ (x-2, y+3)$

$c)\ (x+3, y-2)$ $\quad d)\ (x-3, y+2)$

الحل

الحل الصحيح هو $a)\ (x+2, y-3)$

⑤ الدوران بعكس عقارب الساعة

النقطة	زاوية الدوران	الصورة
(a,b)	90	$(-b,a)$
(a,b)	270	$(b,-a)$
(a,b)	180	$(-a,-b)$

مثال ① صورة النقطة $(-2,5)$ بالدوران بزاوية 90 عكس عقارب الساعة هي $(-5,-2)$

مثال ② النقطة $(3,4)$ هي صورة النقطة $(4,-3)$ عن طريق

a) انعكاس في x $\quad$ b) انعكاس في y

c) دوران بزاوية 270 $\quad$ d) دوران بزاوية 90

الحل

الحل الصحيح هو C) دوران بزاوية 270

❻ التمدد

معامل التمدد k هو $\frac{\text{الطول في الصورة}}{\text{الطول الأصلي}}$

- ❖ $|k| > 1$ يكون التمدد تكبير
- ❖ $|k| < 1$ يكون التمدد تصغير
- ❖ $|k| = 1$ يكون التمدد تطابق

صورة النقطة (x, y) بتمدد معامله k هو (kx, ky)

مثال ① إذا كان $A'B' = 8$ وهو صورة $AB = 6$ فإن معامل التمدد هو ....

الحل $K = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

مثال ② إذا كان معامل التمدد المستخدم في إيجاد صورة نقطة هو -3 فإن هذا التمدد هو ....

الحل حيث أن $|K| = 3$ يكون التمدد تكبير

مثال ③ ماهى صورة النقطة $(10,15)$ بتمدد معامله $\frac{-1}{5}$

الحل $\left(\frac{-1}{5} \times 10, \frac{-1}{5} \times 15\right)$

$(-2, -3)$

ملحوظة

❶ الإنعكاس في خطين متوازيين يكافئ إزاحة مقدارها ضعف المسافة بين الخطين المتوازين ويكون إتجاه الإزاحة عمودي على الخطين المتوازيين

❷ الإنعكاس في خطين متقاطعين يكافئ دوران مركزه نقطة تقاطع الخطين وزاويته ضعف الزاوية بين الخطين

تجميعات السنوات السابقة محلولة فيديو

تجميعات 1437

❶ النقطة $(3,5)$ هى صورة النقطة $(5,3)$ بإنعكاس حول

أ) محور x   ب) محور y

ج) محور y=x   د) نقطة الأصل

❷ مثلث يحدث له إنعكاس مرتين على مستقمين متوازيين فما المحصله لهما

أ إنعكاس   ب) دوران

ج إزاحة   د) تمدد

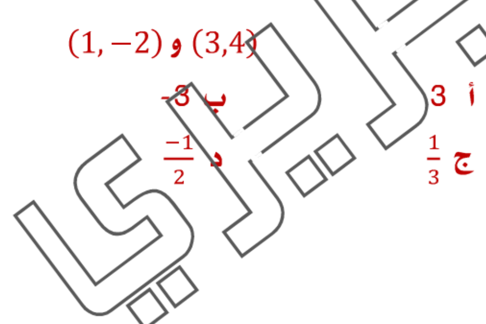
تجميعات 1436

❸ ماهى الإزاحة التي نقلت النقطة $(1,3)$ إلى $(0,5)$

أ $(x - 3, y + 3)$ ب) $(x - 1, y + 2)$

ج $(x - 1, y + 2)$ د) $(x + 1, y + 5)$

❹ ماهو ميل المستقيم المار بالنقطتين $(1, -2)$ و $(3,4)$



أ 3   ب -3

ج $\frac{1}{3}$ د $\frac{-1}{2}$

مفاتيح الحل

4	3	2	1
أ	ب	ج	ج

فيديو شرح التجميعات

١٤ الهندسة المستوية

١ المضلعات

❖ مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع عدد أضلاعه n

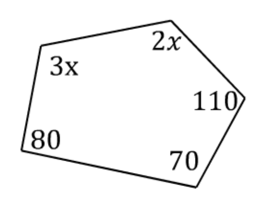
$$(n-2)\times 180$$

مثال ① ماهو مجموع زوايا مضلع عدد أضلاعه 10

الحل مجموع الزوايا هو

$$(10-2)\times 180 = 8\times 180 = 1440$$

مثال ② ماقيمة x في الشكل



الحل

مجموع زوايا الخماسي هو 540

$$2x+3x+110+70+80=540$$
$$5x=280$$
$$x=56$$

❖ قياس الزاوية الداخلية لمضلع منتظم عدد أضلاعه n

$$\frac{(n-2)\times 180}{n}$$

مثال ② ماهو قياس زاوية المضلع الثماني المنتظم

الحل قياس الزاوية هو

$$\frac{(8-2)\times 180}{8}=135$$

❖ عدد أضلاع مضلع منتظم قياس زاويته الداخلية A

$$\frac{360}{180-A}$$

مثال ③ ماهو عدد أضلاع مضلع منتظم قياس إحدى زواياه 135

الحل

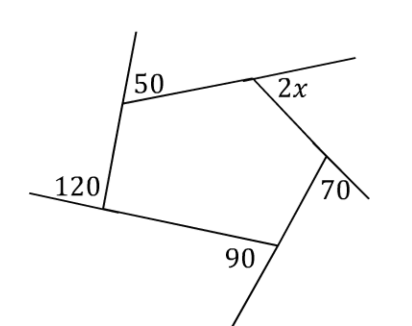
عدد الأضلاع هو

$$\frac{360}{180-135}=8$$

❖ مجموع الزوايا الخارجية لأي مضلع هو 360

مثال ④

ماقيمة x في الشكل



الحل

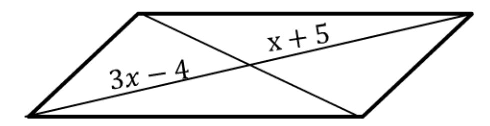
$$2x+50+120+90+70=360$$
$$2x=30$$
$$x=15$$

٢ الأشكال الرباعية

❖ خصائص متوازي الأضلاع

1. كل ضلعان متقابلان متطابقان
2. كل ضلعان متقابلان متوازيان
3. كل زاويتان متقابلتان متساويتان
4. كل زاويتان متجاورتان مجموعهما 180
5. القران ينصف كل منهما الأخر

مثال ⑤ إذا كان الشكل متوازي أضلاع أوجد قيمة x



الحل

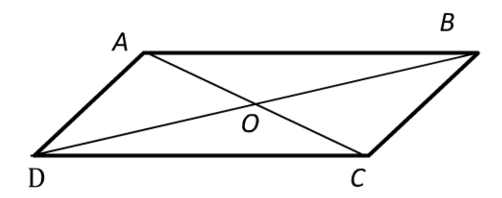
حيث أن القطران ينصف كل منهما الأخر

فإن $3x-4=x+5$

أي أن $x=4{,}5$

مثال ⑥ $ABCD$ متوازي أضلاع فيه

$AO = x - 1 \,,\; AC = 14$ أوجد قيمة x



الحل حيث أن $AC = 14$ فإن $AO = 7$

أي أن $x - 1 = 7$

ومنها $x = 8$

❖ خصائص المستطيل

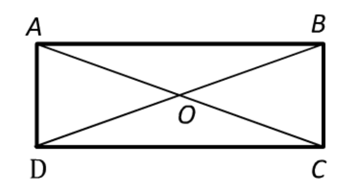
له نفس خصائص متوازي الاضلاع +

❶ القطران متطابقان

❷ زواياه الأربع قوائم

مثال ⑦ $ABCD$ مستطيل فيه

$BO = 11 \,,\; AC = 4X - 2$ أوجد قيمة x



الحل

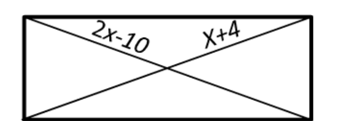
حيث أن $BD = 22$ فإن $BO = 11$

من خواص المستطيل $BD = AC$

ومنها $4x - 2 = 22$

أي أن $x = 6$

تدريب أوجد قيمة x في الشكل



❖ خصائص المعين

له نفس خصائص متوازي الاضلاع +

❶ القطران متعامدان

❷ جميع أضلاعه متطابقة

❸ القطران ينصفا زوايا الرأس

❖ خصائص المربع

له نفس خصائص متوازي الاضلاع +

❶ القطران متعامدان

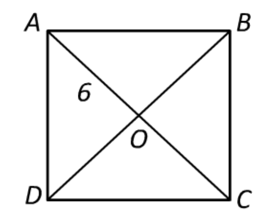
❷ القطران متطابقة

❸ جميع زواياه قوائم

❹ القطران ينصفا زوايا الرأس

المربع = مستطيل + معين

مثال ⑧ الشكل المرسوم مربع أوجد طول BD



الحل

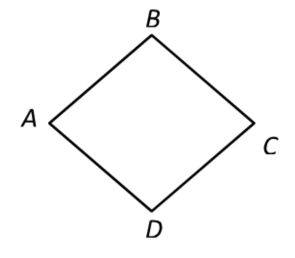
حيث أن $AO = 6$ فإن $AC = 12$

من خواص المربع $AC = BD$

لذلك فإن $BD = 12$

تدريب $ABCD$ معين فيه

$AB = 5x - 2 \,,\; BC = x + 9$ أوجد قيمة x



❖ خصائص شبه المنحرف

❶ ضلعان متقابلان متوازيان

❷ ضلعان متقابلان غير متوازيان



❖ خصائص شبه المنحرف متطابق الساقين

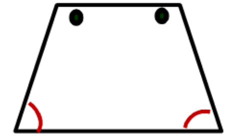
❶ الضلعان الغير متوازيان متساويان

❷ القطران متساويان

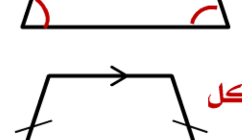
❸ كل زاويتان مرسومتان على القاعدة تكون

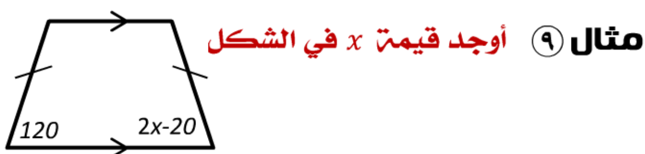
متساوية





مثال ⑨ أوجد قيمة x في الشكل





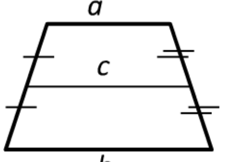
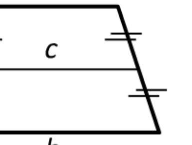
الحل من خواص شبه المنحرف المتطابق الساقين أن

زوايا قاعدته متساويه

لذلك فإن $2x - 20 = 120$

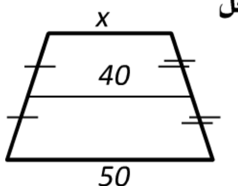
ومنها، $x = 70$

❖ القاعدة المتوسطة في شبه المنحرف

$$C = \frac{a+b}{2}$$

مثال ⑩ أوجد قيمة x في الشكل



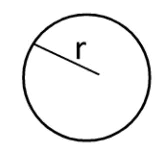
الحل

$$40 = \frac{x+50}{2}$$

أي أن $x + 50 = 80$

ومنها $x = 30$

❸ الدائرة



محيط الدائرة $C = 2\pi r$ أو $d = \pi d$

حيث r نصف القطر، d هو القطر

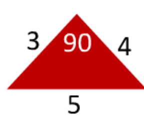
مثال ⑪ أوجد محيط الدائرة

الحل

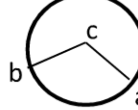
قياس الزاوية المرسومة في منتصف الدائرة هو 90

يكون طول القطر 5 من فيثاغورث

محيط الدائرة هو 5π

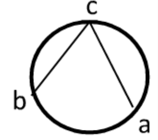


❖ الزاوية المركزية والزاوية المحيطية

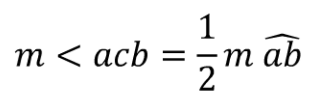


❶ الزاوية المركزية = قياس القوس المقابل لها

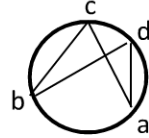
$$m < acb = m\,\widehat{ab}$$



❷ الزاوية المحيطية = $\frac{1}{2}$ قياس القوس المقابل لها



$$m < acb = \frac{1}{2} m\,\widehat{ab}$$

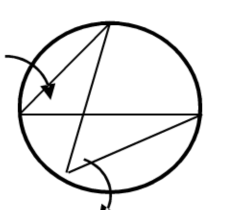


❸ الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس

تكون متساوية

$$m < c = m < d$$

مثال ⑫ أوجد قيمة x في الرسم



الحل

$$2x - 50 = x$$
$$x = 50$$

❖ الأقواس و الأوتار في الدائرة

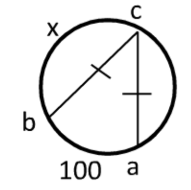
إذا تطابق وتران في الدائرة فإن

أقواسهما متساوية والعكس صحيح

إذا كان $\quad ab = cd$

فإن $\quad \widehat{ab} = \widehat{cd}$

مثال ⑬ في الشكل المقابل أوجد قيمة x



الحل

$$ac = cb$$

فإن $\quad \widehat{ac} = \widehat{cb} = x$

وحيث أن قياس الدائرة = 360

فإن $\quad x + x + 100 = 360$

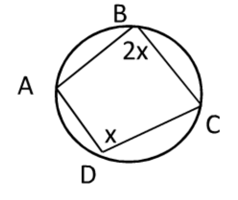
$$2x = 280$$

$$x = 140$$

❖ الشكل الرباعي المرسوم داخل الدائرة

فيه كل زاويتان متقابلتان مجموعهما 180

مثال ⑭ أوجد قياس زاوية B



الحل

حيث أن الشكل رباعي دائري

فإن $\quad x + 2x = 180$

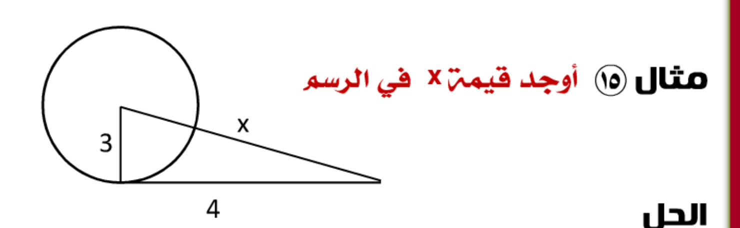
أي أن $\quad x = 60$

وبذلك فإن قياس زاوية B تساوي 120

❖ المماسات في الدائرة

❶ المماس للدائرة عمودي على نصف القطر من عند نقطة التماس

❷ القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان

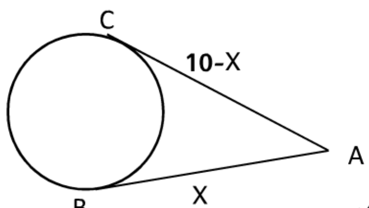


مثال ⑮ أوجد قيمة x في الرسم

الحل

حيث أن المماس للدائرة عمودي على نصف القطر من عند نقطة التماس

فإن المثلث يصبح قائم الزاوية وبذلك فإن قيمة x هى 5 من فيثاغورث



مثال ⑮ أوجد قيمة X

الحل

القطعتان المماستان متساويتان

$$x = 10 - x$$

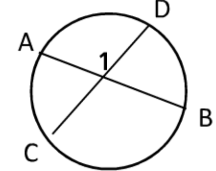
$$2x = 10$$

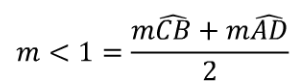
$$x = 5$$

❖ القاطع والمماسات في الدائرة



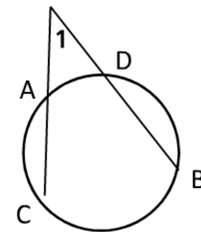
❶ إذا تقاطع وتران داخل الدائرة فإن



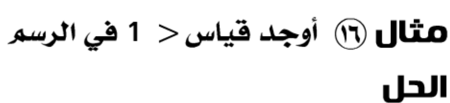


$$m < 1 = \frac{m\widehat{CB} + m\widehat{AD}}{2}$$

❷ إذا تقاطع وتران خارج الدائرة فإن



$$m < 1 = \frac{m\widehat{CB} - m\widehat{AD}}{2}$$



مثال ⑯ أوجد قياس $<$ 1 في الرسم

الحل

$$m < 1 = \frac{120 - 30}{2} = 45$$

٣ إذا تقاطع مماسان خارج الدائرة

$$m<1=\frac{m\widehat{ACB}-m\widehat{AB}}{2}$$

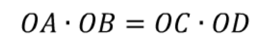
❖ القطع المستقيمة داخل الدائرة

١ إذا تقاطع AB, CD داخل الدائرة

$$OA\cdot OB=OC\cdot OD$$

تدريب أوجد قيمة x

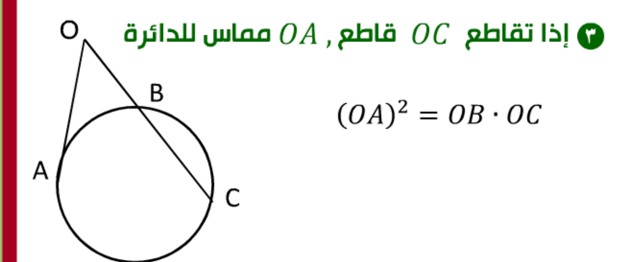
٢ إذا تقاطع AB, CD خارج الدائرة



$$OA\cdot OB=OC\cdot OD$$

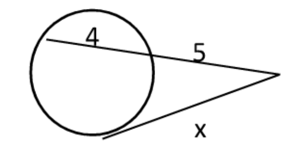
تدريب أوجد قيمة x

٣ إذا تقاطع OC قاطع , OA مماس للدائرة



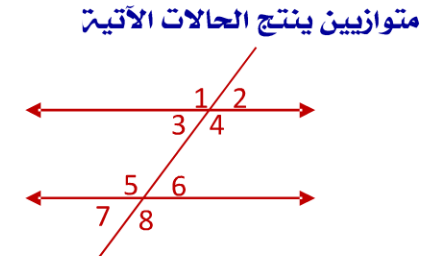
$$(OA)^2=OB\cdot OC$$

تدريب أوجد قيمة x



٤ التوازي

❖ في الشكل المقابل إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين ينتج الحالات الآتية



❖ الزوايا في وضع التبادل

قياس (3) = قياس (6)　　قياس (4) = قياس (5)

قياس (1) = قياس (8)　　قياس (2) = قياس (7)

❖ الزوايا في وضع التناظر

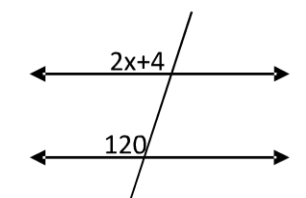
قياس (1) = قياس (5)　　قياس (3) = قياس (7)

❖ الزوايا في وضع التحالف

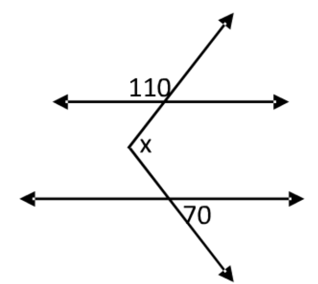
قياس (4) + قياس (6) = 180

قياس (3) + قياس (5) = 180

تدريب 1 أوجد قيمة x

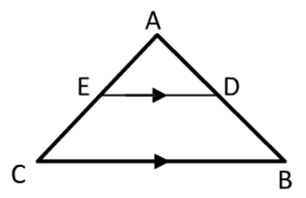


تدريب 2 أوجد قيمة x



❖ المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

❶ القطعة المستقيمة الواصلة بين ضلعين في مثلث وتوازي الضلع الثالث فإنها تقسمهما إلى أجزاء متناسبة



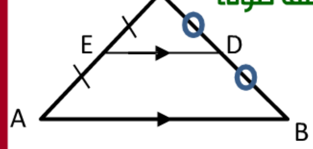
$$\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DB}$$

مثال ⑩ أوجد قيمة x

الحل

$$\frac{3x+1}{x+1} = \frac{5}{2}$$
$$5x + 5 = 6x + 2$$
$$x = 3$$

❷ القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وتساوي نصف طوله



$$CD = \frac{1}{2}AD$$

❸ إذا قطع قاطعان ثلاث مستقيمات متوازية أو أكثر فإن الأجزاء الناتجة على أحدهما تتناسب مع الأجزاء الناتجة على القاطع الأخر

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

تجميعات 1437

❶ إذا كان مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع مثلي مجموع قياسات زواياه الخارجية ، فمانوع هذا المضلع

A مربع B خماسي C سداسي D ثماني

❷ قياس زاويتين متجاورتين في متوازي الأضلاع هما

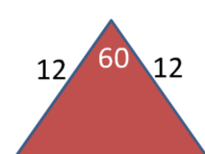
$3x + 42 \;,\quad 2x - 42$

ما قياس الزاويتين

A 150,30 B 140,40

C 100,80 D 135,45

❸ ما محيط المثلث المرسوم

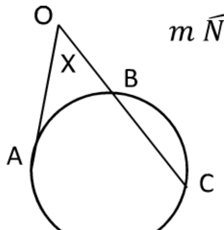


A 24 B 36

C 50 D 72

❹ إذا كان $m\widehat{NP} = 108 \;,\; m\widehat{NR} = 62$

فماقيمة X



A 23 B 64

C 31 D 128

مفاتيح الحل

4	3	2	1
b	b	a	C